Introduzione

Teoria della probabilità

La teoria della probabilità è basta sul paradigma degli esperimenti aleatori. Poniamoci dunque il problema di stabilire che cos'è un esperimento aleatorio e come può essere descritto l'insieme costituito da tutti gli esiti che può produrre.

Esperimento aleatorio

Un esperimento aleatorio è un esperimento il cui esito non può essere predetto con certezza prima di essere eseguito.

Esperimento aleatorio

La teoria della probabilità assume che un esperimento aleatorio possa essere ripetuto indefinitamente sotto le medesime condizioni.

Questa assunzione è importante perché la teoria della probabilità riguarda l'andamento a lungo termine degli esiti di un esperimento aleatorio che viene ripetuto molte volte.

Esperimento aleatorio

Per capire che cos'è un esperimento aleatorio dobbiamo innanzitutto chiarire che cosa si intende con "esperimento".

In generale, per esperimento si intende semplicemente il processo attraverso il quale un osservazione viene compiuta.

Esempio

Lanciare una moneta e **osservare** l'esito che produce (testa o croce), oppure lasciare cadere un oggetto e **misurare** il tempo che impiega a raggiungere il suolo.

Esperimenti deterministici e esperimenti aleatori

- Esperimento deterministico
- Esperimento aleatorio

Esperimento deterministico

Se l'esperimento consiste nella misurazione del tempo impiegato da un oggetto a raggiungere il suolo, essendo note le condizioni iniziali del sistema e risolvendo le equazioni del moto, è possibile predire con esattezza in ogni istante lo stato del sistema.

Esperimento aleatorio

Se l'esperimento consiste nel lancio di una moneta, non è possibile stabilire con certezza se l'esito di un singolo lancio sarà testa o croce.

Che cosa significa "aleatorio"?

Il termine "aleatorio" ha semplicemente il significato di "non conosciuto" ma di per sé ben determinato, ovvero individuato senza possibilità di equivoco.

Un *numero aleatorio*, indicato con una lettera maiuscola, per esempio X, è un numero il cui vero valore è uno solo ma, se lo si dice aleatorio, vuol dire che questo valore non è per noi conosciuto.

Esperimento composto

Supponiamo di definire n esperimenti, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ (lancio di una moneta, estrazione di una carta da un mazzo ben mescolato, ...). Definiamo esperimento composto l'esperimento che consiste semplicemente nell'eseguire gli n esperimenti in sequenza, l'uno in maniera *indipendente* dall'altro.

Esperimento composto

Intuitivamente, la nozione di indipendenza significa che il risultato di un esperimento non influenza il risultato di nessuno degli altri esperimenti.

Esperimento composto

Un altro modo per definire un esperimento composto è il seguente. Supponiamo di avere un solo esperimento aleatorio, *E* (lancio di una moneta, ...). Definiamo esperimento composto l'esperimento costituito da un numero finito (oppure infinito) di *repliche* dell'esperimento *E* (*n* lanci di una moneta, ...)

Spazio campione di un esperimento aleatorio

L'insieme costituito da tutti gli eventi elementari che costituiscono i risultati possibili di un esperimento aleatorio si chiama **spazio campione** e ciascun evento semplice si chiama **punto campione**.

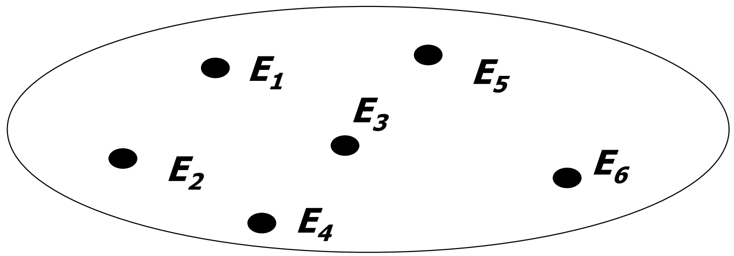
Esempio

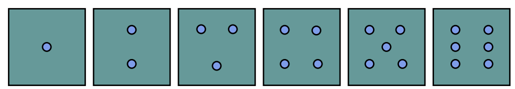
Nel caso dell'esperimento costituito dal lancio di un dado, lo **spazio campione** Ω è l'insieme dei punti campione corrispondenti ai sei eventi elementari E_i, con $i = 1, 2, \ldots, 6$:

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$$

Esempio

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$$





Esempio

Ciascuno degli esiti possibili che costituiscono lo spazio campione Ω si chiama **punto campione**:

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3, \quad E_4, \quad E_5, \quad E_6$$

Esempio

Nel caso dell'esperimento che consiste nell'estrarre una carta da un mazzo, lo **spazio campione** è costituito da tutte le 52 carte del mazzo.

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 13\} \times \{C, Q, F, P\}$

Esempio

Nel caso dell'esperimento consistente nel misurare il Ph di uno yogurt all'uscita da una linea di produzione, lo **spazio campione** è $W = [0,14]$.

Esempio

In questo caso, lo spazio Ω contiene un insieme infinito non numerabile di punti campione.

Tipologie di spazi campione

Si possono distinguere tre tipi di spazio campione:

- spazio campione *finito*
- spazio campione *infinito numerabile*
- spazio campione *infinito non numerabile*

Spazio campione finito

Lo **spazio campione finito** è costituito da un numero finito di elementi.

Esempio

Un'urna contiene 100 palline numerate. Per l'esperimento che consiste nell'estrazione di una pallina dall'urna, lo spazio campione sarà finito e sarà costituito da 100 punti campione, ciascuno dei quali corrisponde ad una delle palline.

Spazio campione infinito numerabile

Lo spazio campione **infinito numerabile** è uno spazio campione infinito nel quale a ogni punto campione può essere associato un numero naturale.

Esempio

Uno psicologo che osserva il numero di pazienti che si presentano ad un centro di igene mentale compie un esperimento i cui risultati possibili costituiscono uno spazio campione infinito numerabile.

Esempio

Infatti, prolungando la sua osservazione lo psicologo può notare il presentarsi di altre persone in aggiunta a quelle già osservate. Verifica perciò un numero sempre maggiore di pazienti che però è in grado di enumerare. Ciascun paziente costituisce uno dei possibili punti campione dello spazio campione infinito numerabile.

Spazio campione infinito non numerabile

Si dice **infinito non numerabile** uno spazio campione i cui eventi semplici sono tali per cui, fissati due di essi, è sempre possibile determinarne almeno un terzo intermedio.

Esempio

Lo spazio costituito dagli eventi "esatto momento della nascita" è uno spazio infinito non numerabile. Infatti, prese due qualunque persone nate ognuna in un certo momento, è sempre possibile individuarne una terza la cui nascita si colloca tra le due precedenti.

Spazio campione discreto

Lo spazio campione associato ad un esperimento si dice **discreto** se è uno spazio finito o infinito numerabile.

Spazio campione continuo

Lo spazio campione si dice **continuo** se è uno spazio infinito non numerabile.

Evento

Il primo problema che dobbiamo porci, dunque, è quello di trovare un modo per descrivere i **risultati possibili** di quel particolare esperimento composto (costituito dalle ripetizioni di un esperimento aleatorio, ovvero da una serie di prove bernoulliane o multinomiali) di cui si occupa la teoria della probabilità.

Evento

Chiamiamo **evento** l'insieme costituito da uno o più dei possibili risultati di un esperimento aleatorio.

Tipologie di eventi

- Eventi elementari
- Eventi complessi

Eventi elementari

Gli eventi elementari sono costituiti da uno solo dei possibili risultati di un esperimento aleatorio.

Gli eventi elementari vengono denotati dalla lettera *E*.

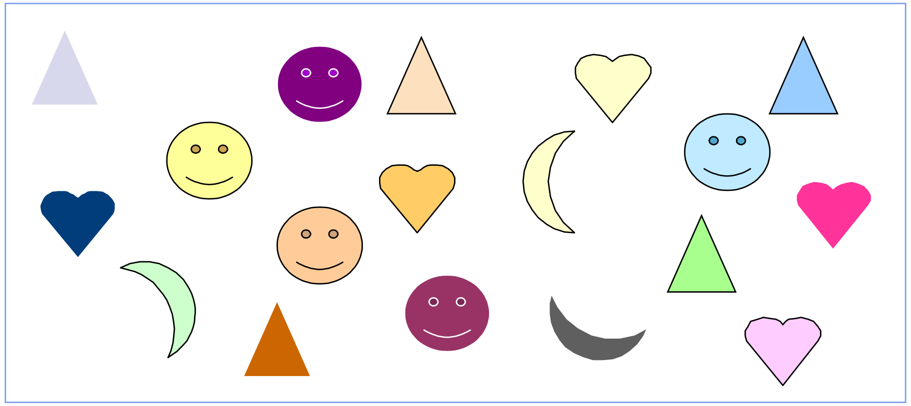
Eventi elementari

Consideriamo l'esperimento aleatorio che consiste nell'estrarre a caso un oggetto dall'urna che contiene gli oggetti rappresentati nella figura seguente.

Si consideri l'evento "triangolo viola".

Eventi elementari

Evento "triangolo viola"



C'è un solo triangolo viola tra questi 18 oggetti

Eventi elementari

Un **evento elementare** corrisponde ad uno solo dei risultati possibili che si possono osservare quando l'esperimento aleatorio viene eseguito.

Eventi elementari

Evento "triangolo viola"

C'è un solo triangolo viola

Eventi elementari

Un **evento elementare** è anche detto punto campione."

Eventi complessi

Gli **eventi complessi** sono costituiti da più di uno dei possibili risultati di un esperimento aleatorio.

Un evento complesso può sempre essere scomposto in eventi elementari. Se un evento non risulta ulteriormente scomponibile è per definizione un evento elementare.

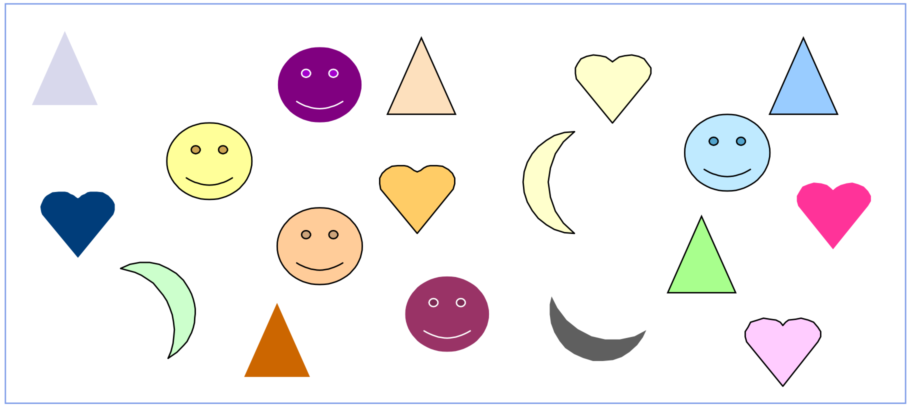
Eventi complessi

Consideriamo nuovamente l'esperimento aleatorio che consiste nell'estrarre a caso un oggetto dall'urna che contiene gli oggetti rappresentati nella figura seguente.

Si consideri l'evento "triangolo".

Eventi complessi

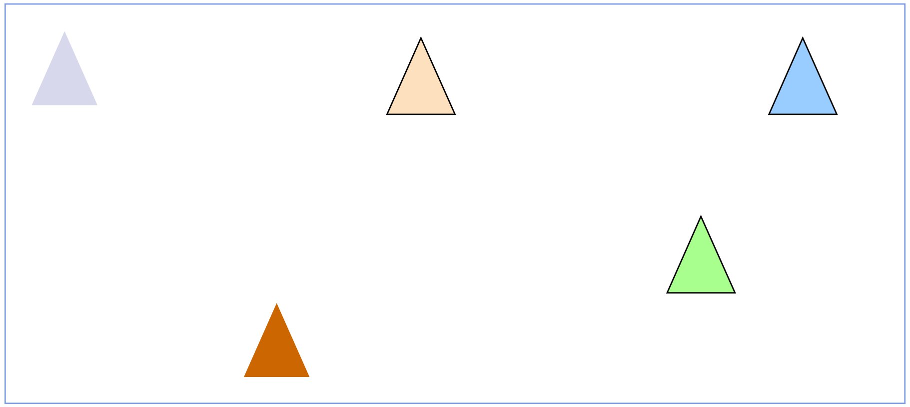
Evento "triangolo"



Ci sono 5 triangoli tra questi 18 oggetti

Eventi complessi

L'evento "triangolo"



Ci sono 5 triangoli

Eventi complessi

"Nello spazio campione di un esperimento aleatorio, un evento composto corrisponde ad un insieme che contiene più di un punto campione."

Un evento è un **sottoinsieme** dello spazio campionario

Esempio

Per l'esperimento costituito dal lancio di un dado viene definito l'evento *A*:
"**si osserva un numero dispari**".

A={1,3,5}

A è un **evento complesso**.

Esempio

Nel caso dell'esperimento costituito dal lancio di un dado viene definito l'evento *B*:
"**si osserva un numero minore di 3**".

A={1,2,3}

Dato che corrisponde ad **2 punti dello spazio campione** di questo esperimento aleatorio, *B* è un **evento complesso**.

Esempio

Nel caso dell'esperimento costituito dal lancio di un dado viene definito l'evento E_5:
"**si osserva il numero 5**".

A={5}

Dato che corrisponde ad **1 solo punto dello spazio campione** di questo esperimento, E_5 è un **evento elementare**.

Eventi mutuamente esclusivi

Ogni qualvolta un esperimento viene eseguito, uno e un solo evento semplice può essere osservato. Gli eventi semplici, dunque, sono mutuamente esclusivi.

Gli eventi mutuamente esclusivi possono essere rappresentati da insiemi disgiunti.

Esempio

Se il lancio del dado produce l'esito 5, non è possibile osservare allo stesso tempo l'esito 6.

Gli eventi E_5 e E_6, quindi, sono mutuamente esclusivi, così come tutti gli altri eventi elementari.

Eventi complessi

Gli eventi complessi non sono di necessità mutuamente esclusivi, in quanto qualsiasi sottoinsieme dello spazio campione può costituire un evento complesso.

Esempio

L'evento A (*esito dispari*) ha luogo se si osserva E_1 o E_3 o E_5.

L'evento B (*numero minore di 3*) ha luogo se si osserva E_1 o E_2. Gli eventi A e B, quindi, non sono mutuamente esclusivi.

Spazio probabilistico

Una volta stabilito come sia possibile descrivere lo spazio campione, poniamoci il problema di costruire quello che va sotto il nome di **spazio probabilistico**.

Spazio probabilistico

Nel caso di uno spazio campione finito, uno spazio probabilistico si costruisce assegnando una numero reale *P*, chiamato probabilità, **a ciascun evento** dello spazio campione Ω.

Spazio probabilistico

Dobbiamo quindi capire che cosa si intende con la nozione di "probabilità".

Argomenti trattati

In particolare, cercheremo di capire
(1) quali sono le proprietà che la nozione di probabilità possiede dal punto di vista matematico,
(2) che relazione c'è tra la nozione matematica di probabilità e i fenomeni del mondo empirico, e
(3) come attribuire le probabilità ai risultati di un esperimento aleatorio.

Interpretazione frequentista della probabilità

Iniziamo con il problema di attribuire un **significato intuitivo** alla nozione di probabilità.

Interpretazione frequentista della probabilità

L'interpretazione più semplice della nozione di probabilità è quella *frequentista*.

Abbiamo visto come gli eventi aleatori (come il lancio di un dado) non possano essere predetti con certezza; tuttavia la *frequenza relativa* con la quale hanno luogo **a lungo andare** è notevolmente stabile.

Interpretazione frequentista della probabilità

Supponiamo di ripetere un esperimento aleatorio *N* volte.

Dato un evento *A*, sia |*A*| la frequenza dell'evento *A* in *N* ripetizioni dell'esperimento. Dunque:

$$|A|/|\Omega|$$

sarà la frequenza relativa di *A*.

Esempio

Consideriamo l'esperimento composto costituito da 100 ripetizioni dell'esperimento consistente nel lancio di un dado.

Definiamo l'evento *A* = esito "numero pari".

Eseguiamo l'esperimento composto e osserviamo l'evento *A* 48 volte.

Esempio

La grandezza di *A* è |*A*| = 48.

La grandezza di Ω è $|\Omega|$ = 100.

La frequenza relativa di *A* è:

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{48}{100} = 0{,}48$$

Esempio

Come si passa dalla nozione di **frequenza relativa** alla nozione di **probabilità**?

Interpretazione frequentista della probabilità

In base all'impostazione frequentista, per probabilità *P* di un evento *A* si intende il limite a cui tende la frequenza relativa delle prove in cui l'evento si verifica, quando il numero di prove tende all'infinito:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A|}{|\Omega|} = P(A)$$

Legge dei grandi numeri

L'affermazione precedente è una descrizione intuitiva di quella che va sotto il nome di legge dei grandi numeri. La legge dei grandi numeri costituisce uno dei teoremi fondamentali della teoria della probabilità.

Probabilità empirica

Ne segue che se disponiamo dei dati di *N* ripetizioni di un esperimento, la frequenza relativa osservata dell'evento *A* può essere usata come un'approssimazione della probabilità *P*(*A*). Questa approssimazione è chiamata probabilità empirica.

Probabilità empirica

Una volta fornita un'interpretazione empirica alla nozione di probabilità, esaminiamo più da vicino quali sono le proprietà matematiche di questa nozione.

Assiomi fondamentali della probabilità

La teoria della probabilità è basata sui 3 assiomi di Kolmogorov.

Assiomi di Kolmogorov

Nel caso di uno spazio campione finito Ω, un numero $P(A)$, chiamato *probabilità* di A, può essere assegnato a ciascun evento A (laddove A è un sottoinsieme di Ω) se i seguenti assiomi vengono rispettati:

Assioma 1

$$P(A) \geq 0$$

Assioma 2

Se A_1, A_2, …, A_m sono eventi mutuamente esclusivi in Ω, allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

Assioma 3

Se lo spazio campione è costituito da N eventi elementari, allora

$$P(\Omega) = P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_N) = 1$$

Interpretazione degli assiomi di Kolmogorov

Il primo degli assiomi precedenti può essere riformulato dicendo che la frequenza relativa ("probabilità") deve essere maggiore o uguale a zero -- frequenze relative negative, infatti, non hanno senso.

Interpretazione degli assiomi di Kolmogorov

Il secondo assioma può essere riformulato dicendo che la frequenza relativa dell'unione di due o più eventi mutuamente esclusivi è uguale alla somma delle rispettive frequenze relative.

Interpretazione degli assiomi di Kolmogorov

In base al terzo assioma, la somma delle frequenze relative di tutti gli eventi elementari dello spazio campione deve essere uguale a 1.

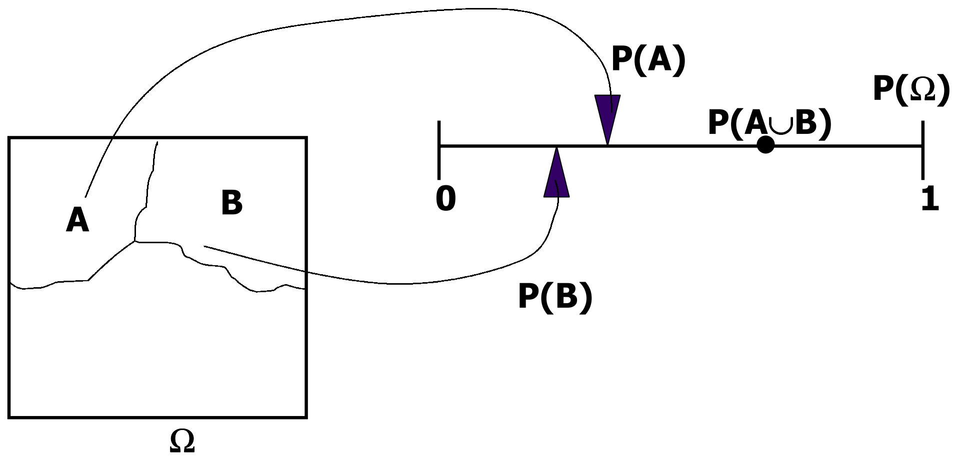
Interpretazione degli assiomi di Kolmogorov

Gli assiomi 1 e 3 corrispondono alla stipulazione di una convenzione: scegliamo di misurare la probabilità di un evento con un numero compreso tra 0 e 1 (piuttosto che con un numero compreso tra -5 e 24).

Interpretazione degli assiomi di Kolmogorov

Il secondo assioma (*additività numerabile*), invece è necessario per la probabilità per la stessa ragione che è richiesto per altre **misure** della grandezza di un insieme.

Interpretazione degli assiomi di Kolmogorov



Interpretazione degli assiomi di Kolmogorov

Si noti che abbiamo descritto le proprietà che devono essere possedute dalla probabilità, ma non abbiamo specificato come si possa assegnare un valore di probabilità agli **eventi elementari** di uno spazio campione.

Misura di probabilità

Per un dato esperimento aleatorio, possono essere definite **molte possibili** misure di probabilità.
Per **"misura" o "distribuzione" di probabilità** intendiamo una regola che ci consenta di assegnare i valori di probabilità agli eventi semplici di uno spazio campione in maniera tale da soddisfare gli assiomi di Kolmogorov.

Misura di probabilità

Anche se molte misure di probabilità sono possibili, **solo la vera misura di probabilità soddisferà la legge dei grandi numeri**.

Misura di probabilità

Per ciascun esperimento aleatorio dobbiamo dunque specificare:

- lo spazio campione Ω;
- una serie di regole per costruire gli eventi composti A_i sulla base degli eventi semplici E_i;
- una misura di probabilità P.

Risulta così definito lo **spazio probabilistico** dell'esperimento aleatorio considerato.

Misura di probabilità

Per esperimento aleatorio che consiste nel lanciare una moneta avremo:

- Ω = {T, C};
- insieme di tutti gli eventi definiti su Ω:

  B_Ω= {∅, (T), (C), (T ∪ C)};
- una misura di probabilità *P:*

  {0, P(T), P(C), 1}.

Misura di probabilità

E' molto facile costruire una misura di probabilità *P* per uno spazio campione finito

$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \}$.

E' infatti sufficiente assegnare a ciascun punto campione ω_i un "peso" p_i in modo tale da soddisfare gli assiomi di Kolmogorov:

Misura di probabilità

$$\forall \omega_i \subset \Omega : P(\{\omega_i\}) \geq 0$$

$$\sum_i P(\{\omega_i\}) = 1$$

$$\forall A \subset \Omega : P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

Misura di probabilità

In molti casi, per creare l'appropriata misura di probabilità è sufficiente applicare una semplice regola.

Misura di probabilità

Per uno spazio campione finito Ω, la più importante distribuzione di probabilità è la distribuzione uniforme:

$$P(A) = |A| \;/\; |\Omega| \quad \text{per } \forall\, A \subseteq \Omega.$$

dove $|A|$ = numero di elementi in A per $A \subseteq \Omega$
$|\Omega|$ = numero di elementi in Ω.

Misura di probabilità

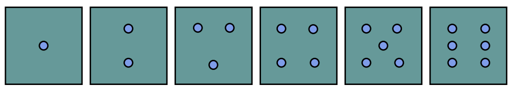
In altre parole, **lo stesso valore di probabilità** viene assegnato a ciascun punto dello spazio campione dell'esperimento aleatorio.

Esempio

Supponiamo di eseguire l'esperimento consistente nel lancio di un dado non truccato.

Lo spazio campione di questo esperimento è costituito dai seguenti eventi elementari:

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$$



Esempio

Possiamo assumere che, **a lungo andare**, tutti gli eventi elementari dello spazio campione avranno la stessa **frequenza relativa**.

A ciascun evento elementare può dunque essere assegnata la probabilità di 1/6:

$$P(E_i) = \frac{1}{6}, \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Esempio

Questo soddisferà la legge dei grandi numeri:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A|}{|\Omega|}=P(A)$$

Esempio

Assegnando una probabilità di 1/6 a ciascun evento semplice risulta soddisfatto il primo assioma:

$$P(A)\geq 0$$

Esempio

Il terzo assioma

$$P(\Omega)=P(E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_n)=1$$

è soddisfatto in quanto

$$P(\Omega)=P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_6)=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6}=1$$

Esempio

Il secondo assioma afferma che possiamo calcolare le probabilità di nuovi eventi composti sommando le probabilità degli eventi semplici in essi contenuti.

Esempio

Ad esempio, la probabilità di osservare l'evento *A* "il lancio del dado produce un numero dispari" sarà:

$$P(A) = P(E_1 \cup E_3 \cup E_5)$$
$$= P(E_1) + P(E_3) + P(E_5) =$$
$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

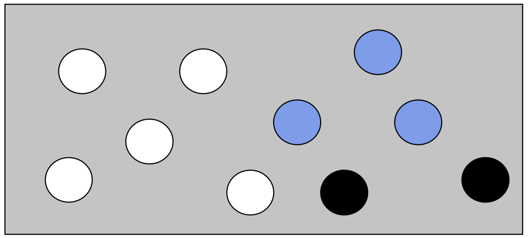
Esempio

Qual è la probabilità di osservare l'evento *B* "il lancio del dado produce un numero > 4"?

$$P(B) = P(E_5 \cup E_6)$$
$$= P(E_5) + P(E_6)$$
$$= 1/6 + 1/6 = 1/3$$

Esempio

Consideriamo l'esperimento costituito dall'estrazione di una pallina da un'urna contenente 10 palline. Di queste, 5 sono bianche, 3 rosse e 2 nere.



Esempio

Definiamo 3 eventi complessi: l'evento *A* ha luogo quando una pallina bianca viene estratta, l'evento *B* ha luogo quando una pallina rossa viene estratta, l'evento *C* ha luogo quando una pallina nera viene estratta.

Ciascuno di questi 3 eventi costituisce un sottoinsieme dello spazio campione Ω.

Esempio

L'evento B ("una pallina rossa è stata estratta") si verifica quando viene osservato uno di 3 eventi elementari di Ω (ovvero, quando viene estratta una delle 3 palline rosse).

Esempio

Supponiamo che ciascuna pallina abbia la stessa probabilità di essere estratta dall'urna.

Qual è la probabilità di osservare l'evento B ("una pallina rossa viene estratta dall'urna")?

Esempio

Abbiamo definito la probabilità dell'evento B "una pallina rossa è stata estratta" come la somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari che lo costituiscono.

Dato che a ciascuno degli eventi elementari dello spazio campione abbiamo assegniamo la probabilità di 1/10, ne segue che

$$P(\textit{estrarre una pallina rossa}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

dato che ci sono 3 palline rosse.

Esempio

Allo stesso modo, $P(\textit{bianco}) = 0{,}5$ e $P(\textit{nero}) = 0{,}2$.

Esempio

$P(rosso) = 0{,}3 \quad P(bianco) = 0{,}5 \quad P(nero) = 0{,}2$

$P(rosso \cup bianco) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$

$P(rosso \cap bianco) = 0$

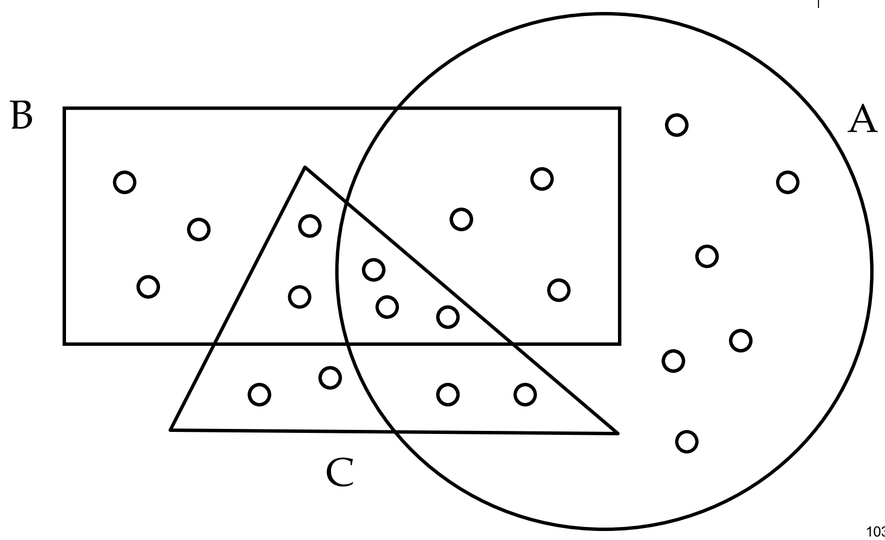
$P(rosso \cup nero) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$

$P(rosso \cup bianco \cup nero) = 1{,}0$

Esercizio

Un archeologo studia tre aree geografiche contenenti i siti di antichi villaggi. L'area racchiusa da un cerchio rappresenta l'influenza della cultura *A*, l'area rettangolare rappresenta l'influenza della cultura *B* e l'area triangolare rappresenta l'influenza della cultura *C*. I punti all'interno di ciascun area rappresentano i possibili siti dei villaggi. Supponiamo che l'archeologo esamini uno di questi siti a caso.

Esercizio



Esercizio

(a) Quale è la probabilità che il sito esaminato sia stato influenzato da una sola cultura?

(b) Quale è la probabilità che il sito selezionato sia stato influenzato da due culture?

(c) Quale è la probabilità che il sito selezionato sia stato influenzato da più di una cultura?

Esercizio

Ciascun membro di un ufficio ha la stessa probabilità di ottenere una promozione. In base ai dati riportati di seguito, si trovi la probabilità che la promozione venga ottenuta da:

(a) una donna
(b) una persona con i capelli bruni
(c) un maschio con i capelli rossi
(d) una donna bionda con un peso minore di 65 chilogrammi

Esercizio

Nome	*Sesso*	*Capelli*	*Peso*
Maria	F	biondi	63
Susanna	F	bruni	66
Gianna	F	biondi	65
Alice	F	rossi	68
Eleonora	F	bruni	67
Giovanni	M	bruni	71
Loretta	F	biondi	63
Giacomo	M	rossi	70
Enrico	M	biondi	73

Prove bernulliane e multinomiali

Se un esperimento (aleatorio) produce solo 2 esiti possibili (successo/insuccesso), allora le repliche indipendenti di questo esperimento sono chiamate prove bernoulliane.

Se un esperimento produce *k* esiti possibili (lancio di un dado) allora le repliche indipendenti di questo esperimento sono chiamate prove multinomiali.

Esempio (prove bernoulliane)

Quali sono le proprietà possedute da quel particolare esperimento composto consistente nel lanciare *n* volte una moneta e contare il numero di esiti “testa” (prove bernoulliane)?

Esempio (prove bernoulliane)

Supponiamo, ad esempio, che un esperimento aleatorio consista nel lanciare una moneta. L'esperimento viene ripetuto per n volte.

Ciò che vogliamo sapere è: qual è la probabilità di ottenere k esiti "testa" (k = 0, 1, 2, …, n)?

Esempio (prove bernoulliane)

La risposta alle domande precedenti consente di definisce la distribuzione di probabilità binomiale.

Esempio (prove multinomiali)

Consideriamo ora un esperimento i cui esiti possibili sono maggiori di due. Ad esempio, potremmo chiederci quali sono le proprietà possedute da quel particolare esperimento composto consistente nell'estrarre **n** campioni casuali indipendenti da un mazzo di carte