2

Probabilità condizionata

Eventi congiunti

La definizione di probabilità condizionata fa uso della nozione di **evento congiunto** $A \cap B$.

Consideriamo dunque con attenzione cosa si intende con evento congiunto $A \cap B$.

Eventi congiunti

Un **evento congiunto** $A \cap B$ è un **evento complesso** che ha la proprietà di essere costituito da un insieme di eventi elementari, ciascuno dei quali appartiene sia all'insieme A che all'insieme B.

Ω

Eventi congiunti

La probabilità di un evento congiunto $A \cap B$ si calcola nello stesso modo in cui si calcola la probabilità di qualsiasi evento complesso: facendo la **somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari che lo compongono**.

Eventi congiunti

Nel caso di uno spazio campione finito costituito da eventi elementari equiprobabili, la probabilità $P(A \cap B)$ è uguale a:

$$P(A \cap B) = \frac{\text{numero di eventi elementari in } A \cap B}{\text{numero totale di eventi elementari}}$$

Eventi congiunti

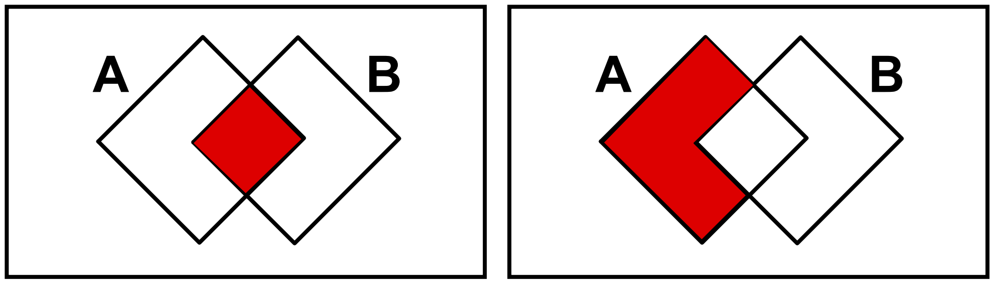
Oltre a $A \cap B$, si possono definire i seguenti eventi congiunti:

$A \cap B^c$	Tutti gli eventi elementari in A e non in B.
$A^c \cap B$	Tutti gli eventi elementari in B e non in A.
$A^c \cap B^c$	Tutti gli eventi elementari che non sono né in A né in B.

Questi 4 eventi congiunti sono mutuamente esclusivi.

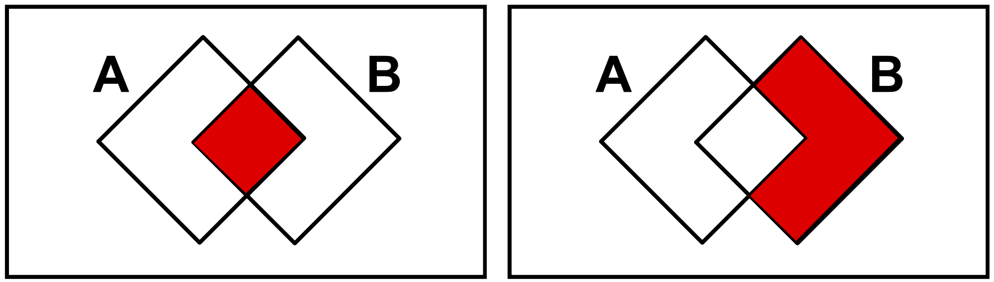
Eventi congiunti

$$P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A)$$



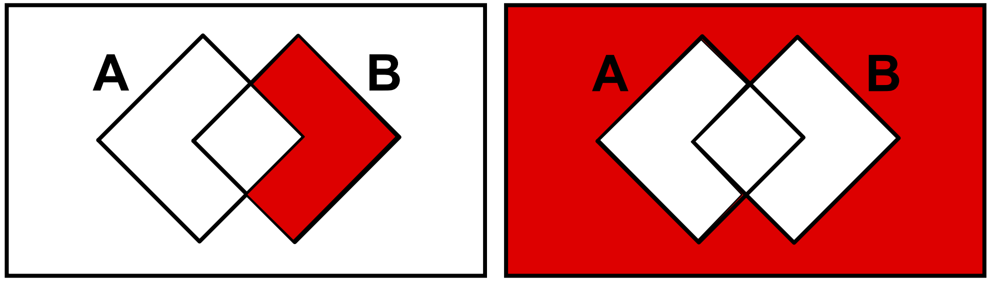
Eventi congiunti

$$P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B)$$



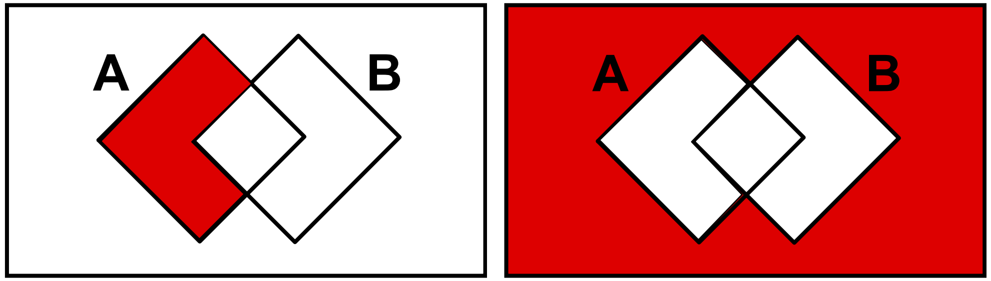
Eventi congiunti

$$P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) = P(A^c)$$



Eventi congiunti

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c) = P(B^c)$$



Eventi congiunti

$$P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A)$$

$$P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B)$$

$$P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) = P(A^c)$$

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c) = P(B^c)$$

Probabilità condizionata

Il problema della probabilità condizionata è quello di calcolare la probabilità di un evento, nel momento in cui sappiamo che un altro evento ha avuto luogo.

Probabilità condizionata

Supponiamo di eseguire un esperimento aleatorio avente spazio campione uguale a Ω e una misura di probabilità P.

Probabilità condizionata

Supponiamo inoltre di sapere che **un evento *B* ha avuto luogo**. In generale, questo altera le probabilità che vengono assegnate ad altri eventi.

Se A è un secondo evento, allora A si verifica **se e solo se** A e B possono verificarsi assieme. In altre parole, lo spazio campione si è ridotto a B.

Probabilità condizionata

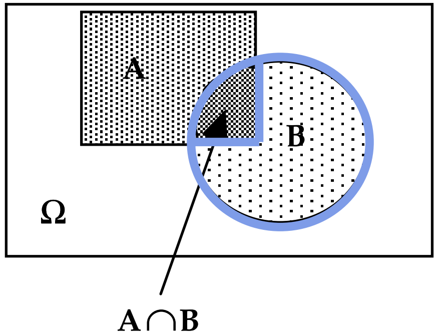
La probabilità che A si verifichi, dunque, dovrebbe essere proporzionale a $P(A \cap B)$. Questo ci conduce alla seguente definizione.

Probabilità condizionata

Siano A e B due eventi definiti per un esperimento aleatorio con $P(B) > 0$. La probabilità condizionata di A dato B è data da:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilità condizionata



$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

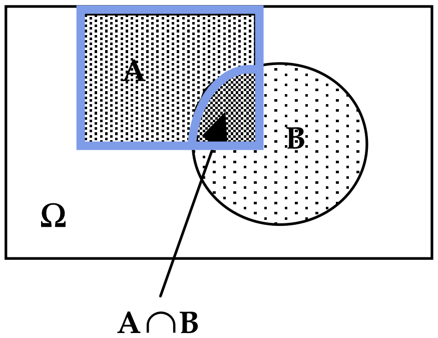
$P(A \mid B)$ rappresenta la probabilità di $A \cap B$ rispetto allo spazio ridotto di B.

Probabilità condizionata

Dati due eventi A e B, si possono definire due probabilità condizionate:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilità condizionata

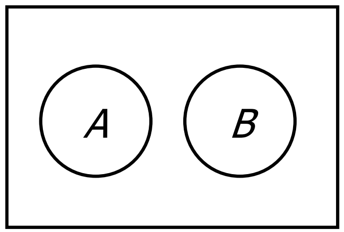


$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P(B \mid A)$ rappresenta la probabilità di $A \cap B$ rispetto allo spazio ridotto di A.

Casi speciali

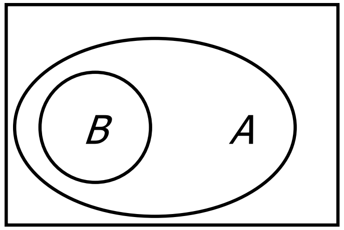
Qual è la probabilità che l'evento A si verifichi sapendo che ha avuto luogo l'evento B, $P(A \mid B)$, nel caso in cui $A \cap B = \varnothing$?



$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B) = 0$

Casi speciali

Qual è la probabilità che l'evento A si verifichi sapendo che ha avuto luogo l'evento B, $P(A \mid B)$, nel caso in cui $B \subseteq A$?

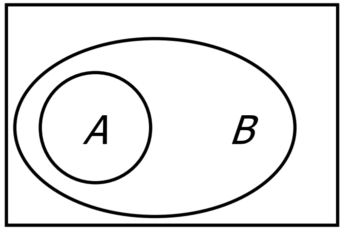


$A \cap B = B$

$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B) = P(B) / P(B) = 1$

Casi speciali

Qual è la probabilità che l'evento A si verifichi sapendo che ha avuto luogo l'evento B, $P(A \mid B)$, nel caso in cui $A \subseteq B$?



$A \cap B = A$

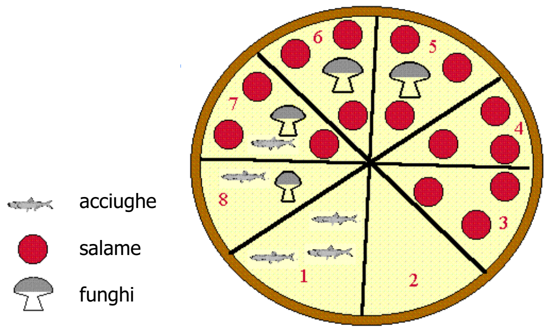
$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B) = P(A) / P(B)$

Riassumendo...

Nel caso di uno spazio campione finito costituito da eventi elementari equiprobabili, la probabilità $P(A \mid B)$ è uguale a:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{numero di elementi di } A \cap B}{\text{numero di elementi di } B}$$

Esempio



Esempio

"Una fetta di pizza viene scelta a caso. Sulla fetta di pizza c'è del salame piccante. Qual è la probabilità che ci siano anche dei funghi?"

P(funghi | salame) = 3/5

$$P(F \mid S) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}$$

Esempio

" Una fetta di pizza viene scelta a caso. Sulla fetta di pizza ci sono delle acciughe. Qual è la probabilità che vi siano anche dei funghi?"

P(funghi | acciughe) = 2/3

$$P(F \mid A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3}$$

Esempio

Supponiamo che un quesito con risposte possibili "si" e "no" sia stato rivolto a 34 studenti, 18 maschi e 16 femmine. I risultati sono i seguenti:

	Maschi	Femmine	
SI	10	4	14
NO	8	12	20
	18	16	*34*

Esempio

Supponiamo di estrarre a caso uno studente da questo gruppo e definiamo le seguenti probabilità:

	Maschi	Femmine	
SI	10	4	14
NO	8	12	20
	18	16	*34*

$$P(M) = \frac{18}{34}$$

$$P(S) = \frac{14}{34}$$

$$P(M \cap S) = \frac{10}{34}$$

Esempio

	Maschi	Femmine	
SI	10	4	14
NO	8	12	20
	18	16	*34*

$$P(M \mid S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)}$$

$$P(M \mid S) = \frac{10/34}{14/34} = \frac{10}{14}$$

Esempio

Si trovi la probabilità di osservare "1" nel lancio di un dado non truccato sapendo che il lancio ha prodotto un esito dispari.

Evento *A*: si osserva "1".

Evento *B*: si osserva un numero dispari.

Qual è la probabilità di *A* dato che si è verificato *B*?

Esempio

Evento *A*: si osserva "1".
Evento *B*: si osserva un numero dispari.

$$P(A \cap B) = 1/6 \qquad P(B) = 1/2$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Esempio

Evento *A*: si osserva "1".
Evento *B*: si osserva un numero dispari.

In altri termini, rispetto allo spazio ridotto di ***B* = {1, 2, 3}**, la probabilità di osservare ***A* = {1}** è 1/3.

Leggi della probabilità

Leggi della probabilità

- Legge del prodotto
- Legge della somma
- Legge della probabilità totale
- Teorema di Bayes

Leggi della probabilità

Legge del prodotto

Legge del prodotto

La probabilità dell'evento congiunto $A \cap B$ è

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

Legge del prodotto

La legge del prodotto segue direttamente dalla definizione di probabilità condizionata:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Legge del prodotto

A e *B* si dicono (statisticamente) indipendenti se $P(A \mid B) = P(A)$ e $P(B \mid A) = P(B)$. In tal caso:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Leggi della probabilità

Legge della somma

Legge della somma

La probabilità dell'unione di due eventi *A* e *B* è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

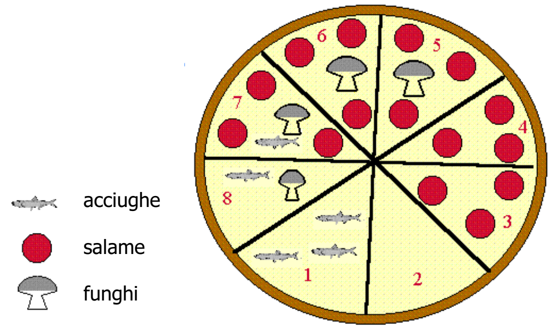
Legge della somma

Se A e B sono mutuamente esclusivi, allora

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Esempio



Esempio

"Una fetta di pizza viene scelta a caso. Qual è la probabilità che la fetta di pizza abbia del salame piccante oppure dei funghi?"

P(funghi $\cup$ salame) =

= P(funghi) + P(salame) - P(funghi $\cap$ salame) =

= 4/8 + 5/8 - 3/8 = 3/4

Esempio

Sia A l'evento "donna" e B l'evento "mancino".

Siano

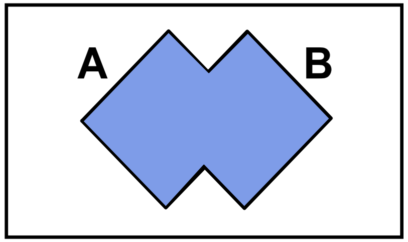
$P(A) = 0,51$

$P(B) = 0,35$

$P(A \cap B) = 0,10$

Esempio

Quale è la probabilità di osservare una donna oppure un mancino?



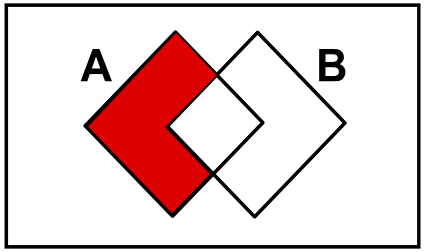
$P(A \cup B) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,51 + 0,35 - 0,10 = 0,76$

Esempio

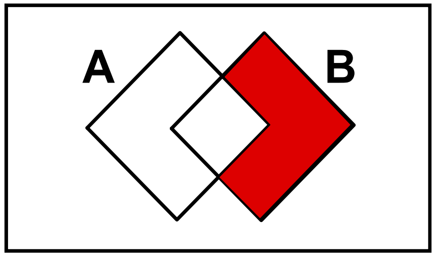
Quale è la probabilità di osservare una donna non mancina? $P(A \cap B^c)$



$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,51 - 0,10 = 0,41$

Esempio

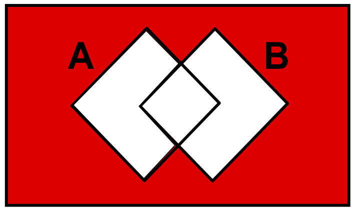
Quale è la probabilità di osservare un uomo mancino? $P(A^c \cap B)$



$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,35 - 0,10 = 0,25$

Esempio

Quale è la probabilità di osservare un uomo non mancino? $P(A^c \cap B^c)$



$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) - \mathrm{P}(A^c \cap B) = 0,49 - 0,25 = 0,24$

$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,76 = 0,24$

Legge della probabilità totale

Formula di Bayes

Eventi A e B

Relazione tra P(A|B) e P(B|A):

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)\,\frac{\mathrm{P(A)}}{\mathrm{P(B)}}$$

<u>Dim</u>. Divido membro a membro le relazioni:

P(A|B)=P(A∩B)/P(B)

P(B|A)=P(A∩B)/P(A)

Esempio

Due dadi vengono lanciati. Qual è la probabilità che la somma dei punti prodotti dai due dadi sia 6 dato che i due dadi producono esiti diversi?

Esempio

S_2 (colonne), S_1 (righe)

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Esempio

Imponiamo sullo spazio campione Ω una distribuzione di probabilità uniforme (a tutti gli eventi semplici viene assegnata la stessa probabilità).

Esempio
(continua)

Definiamo i seguenti eventi:

$\boldsymbol{A}$ = {**i due dadi producono risultati diversi**}

$\boldsymbol{B}$ = {**somma = 6**}

Il problema richiede $P(B \mid A)$

$$P(B \mid A) = P(A \cap B) \; / \; P(A)$$

Esempio
(continua)

$\boldsymbol{A}$ = {**i due dadi producono risultati diversi**}

	1	2	3	4	5	6
1	**1, 1**	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	**2, 2**	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	**3, 3**	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	**4, 4**	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	**5, 5**	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	**6, 6**

Esempio
(continua)

$\boldsymbol{A}$ = {**i due dadi producono risultati diversi**}

$$A = \Omega - \{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (4, 4),\ (5, 5),\ (6, 6)\}$$

$$P(A) = 1 - 6/36 = 30/36 = 5/6$$

Esempio

(continua)

B = {**somma = 6**}

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	**1, 5**	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	**2, 4**	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	**3, 3**	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	**4, 2**	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	**5, 1**	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Esempio

(continua)

B = {**somma = 6**}

$$B = \{(1, 5),\ (2, 4),\ (3, 3),\ (4, 2),\ (5, 1)\}$$

$$P(B) = 5/36$$

$$A \cap B = \{(1, 5),\ (2, 4),\ (4, 2),\ (5, 1)\}$$

$$P(A \cap B) = 4/36$$

Esempio

(continua)

La probabilità che la somma dei punti dei due dadi sia 6 (B) dato che i due dadi producono esiti diversi (A) è:

$$P(B \mid A) = P(A \cap B) \,/\, P(A)$$

$$P(B \mid A) = (4/36) \,/\, (30/36) = 2/15$$

Esempio

$$P(B \mid A) = P(A \cap B) \,/\, P(A)$$

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	**1, 5**	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	**2, 4**	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	**4, 2**	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	**5, 1**	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6