4

Variabili aleatorie

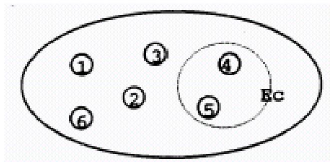
Riepilogo

ESPERIMENTO: operazione di cui non si conosce "a priori" il risultato

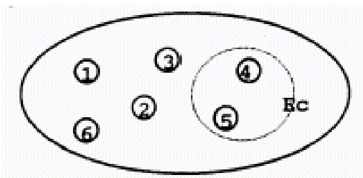
EVENTO SEMPLICE: ciascun risultato (E) di un esperimento, il verificarsi di un evento Ei esclude il verificarsi di qualunque altro evento Ej.

SPAZIO DELLE PROVE: l'insieme (S) di tutti i possibili eventi semplici

S -= {E}
- finito
- infinito
- discreto
- continuo



Riepilogo



ASSIOMI DELLA TEORIA DELLE PROBABILITA'

1) $P(S) = 1$
2) $1 > P(E) > 0 \quad \forall E \subset S$
3) $P(E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_m)$
   Se $Ei \quad Ej = \emptyset \; Vi \quad j$

EVENTO COMPOSTO (Ec): ciascun insieme di eventi semplici

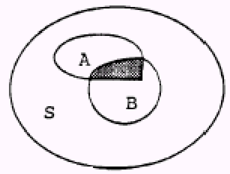
PROBABILITA' DI UN EVENTO: La probabilità di un evento è un numero, associato ad ogni evento dell'insieme delle prove, soddisfacente le seguenti proprietà:

Riepilogo

Dati 2 eventi A e B, si definisce

Probabilità totale : $P(A \cup B)$

Probabilità composta $P(A \cap B)$



Probabilità condizionata:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{se } P(A) > 0$$

$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

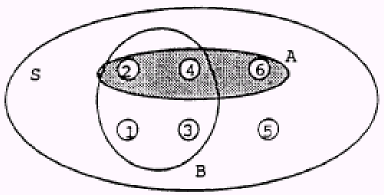
Riepilogo

Esempio:

LANCIO DI UN DADO

A: numero pari

B: numero <=4



$P(E) = \frac{1}{6} \quad \forall E \subset S$

$P(A \cup B) = P(1,2,3,4,6) = \frac{5}{6}$ $\quad P(A \cap B) = P(2,4) = \frac{2}{6}$ $\quad P(B/A) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$

Riepilogo

Eventi statisticamente indipendenti

Definizione $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Risulta :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Che cos'è una variabile aleatoria?

Ω: spazio campione (insieme di tutti i risultati possibili dell'esperimento)

I punti ω di uno spazio campione Ω sono delle entità concrete come individui, molecole, monete, carte da poker, …, e in quanto tali possiedono vari attributi misurabili.

Che cos'è una variabile aleatoria?

Consideriamo, ad esempio, una popolazione composta da *n* individui:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_n\}$$

Che cos’è una variabile aleatoria?

Esperimento aleatorio: estrazione casuale di un individuo da questa popolazione.

Variabile aleatoria “QI della popolazione”

$$\omega \in \Omega \quad \rightarrow \quad Q(\omega),$$

dove $Q(\omega)$ denota il QI di ω.

Che cos’è una variabile aleatoria?

Allo stesso modo, possiamo indicare l’altezza, il peso e il reddito di ω con le funzioni

$$\omega \rightarrow A(\omega)$$

$$\omega \rightarrow P(\omega)$$

$$\omega \rightarrow R(\omega)$$

Che cos’è una variabile aleatoria?

Per alcuni scopi medici, può essere appropriata una combinazione lineare di altezza e peso:

$$\omega \quad \rightarrow \quad b_1 A(\omega) + b_2 P(\omega)$$

dove b_1 e b_2 sono due numeri.

Che cos’è una variabile aleatoria?

I numeri $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $P(\omega)$, $R(\omega)$ che abbiamo associato ai punti campione ω_i sono chiamati variabili aleatorie.

Definizione

Una variabile aleatoria X è una funzione numerica di ω avente come dominio Ω e come codominio l'insieme dei numeri reali:

$$\omega \in \Omega : \omega \to X(\omega)$$

Definizione

Una variabile aleatoria è dunque un numero che viene assegnato mediante una determinata regola a ciascun punto dello spazio campione, ovvero a ciascuno degli esiti possibili di un esperimento aleatorio.

Perchè una variabile viene detta "aleatoria"?

Il termine "aleatorio" fa riferimento al fatto che ci occupiamo degli esiti possibili di un esperimento aleatorio, ovvero, di un esperimento il cui esito è incerto prima che l'esperimento venga eseguito. Una volta che l'esperimento viene eseguito, il valore $X(\omega)$ risulta completamente determinato (realizzazione della variabile aleaoria).

Perchè una variabile viene detta "aleatoria"?

Per esempio, l'esperimento aleatorio potrebbe consistere nell'estrazione casuale di un individuo da una popolazione e nella misurazione del QI di quel individuo, $Q(\omega)$. Prima di eseguire l'esperimento, il valore $Q(\omega)$ non è conosciuto. Dopo che l'esperimento è stato eseguito, $Q(\omega)$ assume un valore determinato.

Variabili aleatorie discrete e continue

Una variabile aleatoria si dice discreta se può assumere solo un numero finito o infinito numerabile di valori;

si dice continua se può assumere tutti gli infiniti valori dei numeri reali o di un loro intervallo [a, b].

Variabili aleatorie (V.a.)

V.a. X e' una funzione reale degli eventi di uno spazio delle prove (S) probabilizzato

$$E \xrightarrow{X} X(E \subseteq S) = x \in D \subseteq R$$

S Insieme di definizione di X

x=X(E) Realizzazione della variabile aleatoria X

Se D è un insieme continuo (misura velocità, altezza) v.a. continua

Se D è un insieme discreto (Lancio dado, moneta) v.a. discreta

La probabilità di una realizzazione d'una variabile aleatoria è la probabilità che si verifichi l'evento ad essa associato

Esempio

Un esperimento consiste nel lancio di *due monete*.

Sia *Y* la v.a. che esprime il numero di volte in cui l'esito "testa" viene osservato in ciascuna prova dell'esperimento.

Esempio

I quattro punti campione in Ω sono:

$\omega_1 = \{TT\}$, $\omega_2 = \{TC\}$, $\omega_3 = \{CT\}$, $\omega_4 = \{CC\}$

Esempio

$\omega_1 = \{TT\}$, $\omega_2 = \{TC\}$, $\omega_3 = \{CT\}$, $\omega_4 = \{CC\}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$Y = 2$ $Y = 1$ $Y = 1$ $Y = 0$

Esempio

La variabile aleatoria Y può assumere tre valori ($Y = 0, 1, 2$) e ciascuno definisce un evento complesso definito dal seguente insieme di punti campione:

$$\{Y = 0\} = \{E_4\} \qquad \{Y = 1\} = \{E_2, E_3\} \qquad \{Y = 2\} = \{E_1\}.$$

Notazione

Solitamente le variabili aleatorie sono indicate con le lettere maiuscole, mentre gli specifici valori che assumono vengono indicati dalle lettere minuscole.

Notazione

Nel caso dell'esperimento costituito dal lancio di un dado, ad esempio, Y indica uno qualunque dei 6 valori numerici che possono essere prodotti, mentre y denota lo specifico valore che viene osservato quando il dado è stato tratto.

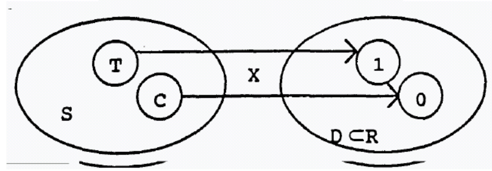
Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

La probabilità che la variabile aleatoria discreta Y assuma il valore y, $P(Y = y)$, è definita come <u>la somma delle probabilità di tutti i punti campione in Ω a cui viene assegnato il valore y</u>.

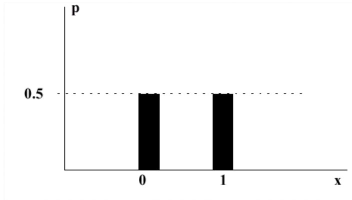
Generalmente, si denota $P(Y = y)$ con $p(y)$.

La probabilità di una realizzazione d'una variabile aleatoria (discreta) è la probabilità che si verifichi l'evento ad essa associato

$$P[X(E) = x] = P(E)$$



X(T)=1, P(T)=0.5
X(C)=O, P(C)=0.5
P(1)=0.5.
P(O)=0.5



Esempio

$\omega_1 = \{TT\}$, $\omega_2 = \{TC\}$, $\omega_3 = \{CT\}$, $\omega_4 = \{CC\}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$Y = 2$ $Y = 1$ $Y = 1$ $Y = 0$

$$P(Y = 0) = P(\omega_4)$$
$$P(Y = 1) = P(\omega_2) + P(\omega_3)$$
$$P(Y = 2) = P(\omega_1)$$

Esempio

$$P(Y = 0) = P(\omega_4)$$
$$P(Y = 1) = P(\omega_2) + P(\omega_3)$$
$$P(Y = 2) = P(\omega_1)$$

Dato che i punti dello spazio campione ω_i sono equiprobabili, la distribuzione di probabilità di Y sarà:

y	*p(y)*
0	1/4
1	2/4
2	1/4

Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

La corrispondenza tra i numeri $\{y\}$ ed i rispettivi $\{p(y)\}$ definisce la distribuzione di probabilità di Y

y tali che $p(y)$ è 0 possono essere omessi.

Proprietà di una distribuzione di probabilità discreta

Le probabilità $p(y) = P(Y = y)$ sono dette probabilità elementari e posseggono le seguenti proprietà:

$$(i) \qquad \forall i: \qquad p(y_i) \geq 0$$

$$(ii) \qquad \sum_{\mathrm{i}} p(y_i) = 1$$

ESEMPIO DI FUNZIONE DI FREQUENZA ERRATA

$$q(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x-2)^3 & x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\sum_x q(x) = \frac{1}{9}(0-2)^3 + \frac{1}{9}(1-2)^3 + \frac{1}{9}(2-2)^3 + \frac{1}{9}(3-2)^3 + \frac{1}{9}(4-2)^3 + \frac{1}{9}(5-2)^3$$

$$= -\frac{4}{9} - \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{9}{9} = 1$$

QUALE DELLE DUE FUNZIONI E' UNA FUNZIONE DI FREQUENZA ?

1

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x-2)^2 & x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

2

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{19}(x-2)^2 & x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Esempio

Uno psicologo sceglie in maniera casuale 2 soggetti per un esperimento da un insieme costituito da 3 maschi e 3 femmine. Sia *Y* il numero di femmine scelte. Si trovi la distribuzione di probabilità di *Y*.

Esempio

In ciascun gruppo di due individui ci possono essere 0, 1 o 2 femmine.

Quindi, la variabile *Y* può assumere i tre valori: 0, 1, 2.

Esempio

In quanti modi diversi possono essere scelte = 0 femmine?

Lo psicologo deve scegliere:

- 0 femmine da un insieme di 3
- 2 maschi da un insieme di 3.

Per questo evento, il numero di possibili scelte è

$$\binom{3}{0}\binom{3}{2} = 3$$

Esempio

La grandezza dello spazio campione è

$$\binom{6}{2} = 15$$

Esempio

La probabilità di scegliere 0 femmine, $P(Y = 0)$, è dunque uguale a

$$P(Y=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{5}$$

Esempio

In maniera equivalente

$$P(Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{3}{5} \qquad P(Y=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{5}$$

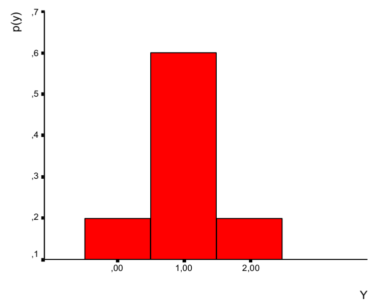
Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

Una volta trovate le probabilità associate a ciascuno dei valori che Y può assumere possiamo costruire una tabella che contiene la distribuzione di probabilità di Y per questo esempio.

y	p(y)
0	1/5
1	3/5
2	1/5

Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

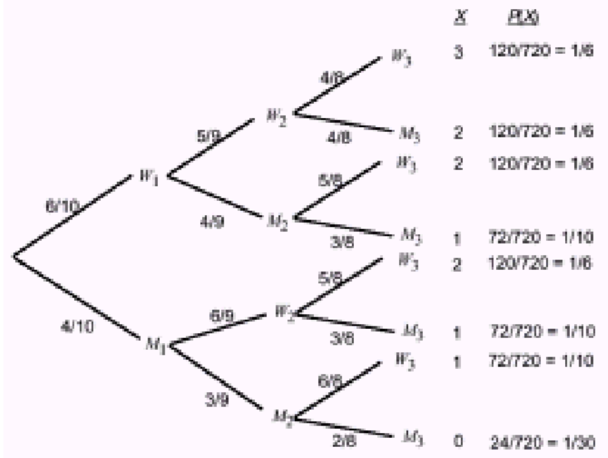
Le stesse informazioni della tabella precedente possono essere trasmesse per mezzo di un istogramma.



Area e probabilità

Se costruiamo l'istogramma in modo tale che la larghezza di ciascuna barra dell'istogramma sia unitaria, allora l'area di ciascuna barra diventerà uguale alla probabilità che Y assuma il valore rappresentato da quella barra.

In un gruppo composto da 4 studentesse e 6 studenti. Tre sono scelti a caso per una prova alla lavagna. Quale sono le probabilità di avere 0,1,2 o 3 studenti.



$$p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & x = 3 \\ 1/2 & x = 2 \\ 3/10 & x = 1 \\ 1/30 & x = 0 \end{cases}$$

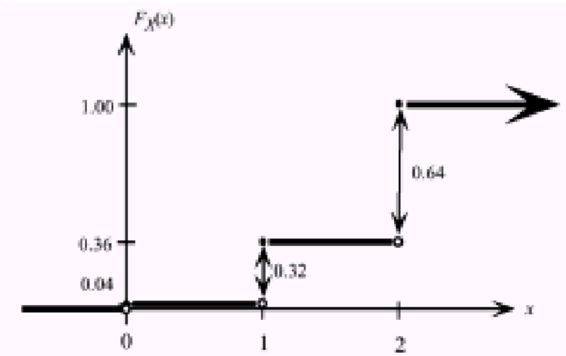
Funzione Distribuzione di Probabilità dì V.a discrete

$$F_X(x) = P(X \le x).$$

$$F_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{x} p_X(y)$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.04 & \text{for } x = 0 \\ 0.32 & \text{for } x = 1 \\ 0.64 & \text{for } x = 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.04 & 0 \le x < 1 \\ 0.36 & 1 \le x < 2 \\ 1.00 & x \ge 2 \end{cases}$$



Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

Il modo più conciso per rappresentare una distribuzione di probabilità è per mezzo di una formula. Per l'esempio precedente, la formula per $p(y)$ diventa:

$$p(y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{3}{2-y}}{\binom{6}{2}}, \qquad y = 0,\ 1,\ 2.$$

Valore atteso di una variabile aleatoria discreta

Sia *Y* una variabile aleatoria discreta con una distribuzione di probabilità *p*(*y*). Il valore atteso o speranza matematica di *Y* è definito come:

$$E(Y)=\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\})$$

$$E(Y)=\sum_{y} yp(y)$$

Esempio

Un esperimento consiste nel lancio di un dado non truccato. Sia *X* il numero di punti osservati sulla faccia superiore dopo che il dado è stato tratto. Si calcoli il valore atteso di *X*.

Esempio

Dato che il dado non è truccato, la distribuzione di probabilità di *X* è uniforme: $P(X=x_i)=\frac{1}{6}$, con *i* = 1, …, 6. Il valore atteso di *X* è:

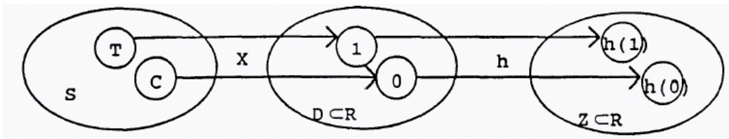
$$E(X)=\sum xp(x)$$

$$=1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)=3{,}5$$

Valore atteso (media) di una variabile aleatoria discreta:

$$E(X)=\sum_{x} xp_X(x)$$

Data una variabile aleatoria X, è sempre possibile definire una funzione della variabile aleatoria X g(X), la funzione risulta essere a sua volta una funzione aleatoria.



SI DIMOSTRA:

$$E[g(X)]=\sum_{x} g(x)p_X(x)$$

ESEMPIO
Gioco della roulette. Scommettiamo 1 Dollaro a Las Vegas su *dispari*.

Qual è la speranza matematica di vincita.?

$$p_X(1) = P(X=1) = P(\{1,3,5,\ldots,35\}) = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$$

$$p_X(-1) = P(X=-1) = 1 - \frac{9}{19} = \frac{10}{19}$$

Risposta

Vincita attesa= 1 (9/19) + (-1) (10/19) = -0.053 $ (circa -100 lire)

Proprietà del valore atteso

- Somma di due variabili aleatorie
- Prodotto di due variabili aleatorie

Teorema 1

Il valore atteso della somma di due variabili aleatorie discrete X e Y è uguale a:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Dimostrazione

$$E(X+Y) = \sum_{\omega} \left(X(\omega) + Y(\omega)\right) P(\omega)$$

$$= \sum_{\omega} X(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega} Y(\omega) P(\omega)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

Dal teorema 1 derivano le seguenti proprietà

$$E(a) = a$$

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(aX + bX) = aE(X) + bE(X)$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

Esempio

Consideriamo l'esperimento consistente nel lancio di due dadi. Sia X_1 l'esito prodotto dal lancio del primo dado e X_2 l'esito prodotto dal lancio del secondo dado. Sia $Y = X_1 + X_2$.

Il valore atteso di Y:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$$

Proprietà

In generale,

$$E(X \cdot Y) \neq E(X)E(Y)$$

Momenti di una variabile aleatoria discreta

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$$

$$\begin{aligned} M1 &= E[x] \\ M2 &= E[x^2] \\ M3 &= E[x^3] \\ M4 &= E[x^4] \\ M4 &= E[x^4] \\ &\cdot \\ Mn &= E[x^n] \end{aligned}$$

Varianza di una variabile aleatoria discreta

La varianza di una variabile aleatoria discreta X è definita come il valore atteso di $(X - \mu)^2$.

$$V(X) = \sigma^2(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

ovvero

$$V(X) = \sum_x (x - E(X))^2 p(x)$$

Deviazione standard

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

Esempio

Sia X il numero di punti prodotti dal lancio di un dado. Si trovi la varianza di X.

Esempio

Il valore atteso di X, $E(X) = 3{,}5$, è stato calcolato in precedenza. La varianza di X diventa quindi

$$\sigma^2(X) = \sum_x (x - E(X))^2 p(x)$$

$$\sigma^2(X) = (1 - 3{,}5)^2 \frac{1}{6} + (2 - 3{,}5)^2 \frac{1}{6} + (3 - 3{,}5)^2 \frac{1}{6} +$$
$$+ (4 - 3{,}5)^2 \frac{1}{6} + (5 - 3{,}5)^2 \frac{1}{6} + (6 - 3{,}5)^2 \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

Formula alternativa per la varianza

La formula

$$\sigma^2(X) = \sum_x (x - E(X))^2 p(x)$$

può essere riscritta come:

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E\{[X - E(X)]^2\} = E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - E(2XE(X)) + E\{[E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(x)]^2\end{aligned}$$

Varianza lancio del dado come differenza momenti

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 9\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{91}{6},\end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Proprietà della varianza

La varianza di una variabile aleatoria discreta X moltiplicata per una costante è uguale alla varianza della variabile aleatoria moltiplicata per la costante innalzata al quadrato:

$$\sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$$

$$E(aX) = \sum_x axp_X(x) = a\sum_x xp_X(x) = aE(x)$$

$$\sigma^2_{aX} = E\left\{[aX - E(aX)]^2\right\} = E\left\{[aX - aE(X)]^2\right\} = E\left\{a^2[X - E(x)]^2\right\}$$
$$= a^2 E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = a^2\sigma^2_X$$

Esempio

$X_1 = \{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

$X_2 = \{4,\ 6,\ 10,\ 12\}$

$S^2_{X1} = 2{,}5$

$S^2_{X2} = 10{,}0 = 2{,}5 \times 2^2$

Proprietà della varianza

La varianza di una variabile aleatoria discreta *X* non muta se a ciasun valore *x* viene sommata una costante *a:*

$$\sigma^2(X+a) = \sigma^2(X)$$

$$E(X+a) = \sum_x (x+a)p_x(x) = \sum_x xp_x(x) + \sum_x ap_X(x)$$
$$= E(X) + a\sum_x p_X(x) = E(x) + a$$

$$\sigma^2_{X+a} = E\left\{[(X+a) - E(X+a)]^2\right\} = E\left\{[X + a - E(X) - a]^2\right\}$$
$$= E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = \sigma^2_X$$

Esempio

X_1 = {2, 3, 5, 6}

X_2 = {12, 13, 15, 16}

S^2_{X1} = 2,5

S^2_{X2} = 2,5

Teorema 3

Se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti, allora:

$$\sigma^2(X+Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)$$

Dim. Omessa

Differenza tra due variabili aleatorie indipendenti

In maniera analoga:

$$\sigma^2(X-Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)$$

Esercizio 1

Sia X una v.a. discreta caratterizzata da:

p(1)=p(2)=k, p(3)=p(4)=2k.

(a) Quanto vale k ?

(b) Quanto valgono la media e la varianza di X ?

Esercizio 2

L'illuminazione di un'area industriale è assicurata da 250 lampade. Una lampada costa 25 Euro ed ha una probabilità di rottura annua paria a 0.9.

(a) Qual è la distribuzione di probabilità del costo annuo di sostituzione delle lampade guaste nell'area industriale ?

(b) Quanto vale il costo atteso di sostituzione delle lampade (in un anno) ?