5

Variabili aleatorie discrete

La variabile aleatoria di Bernoulli con parametro p

Il risultato X di un esperimento può essere classificato come:

"un successo" oppure "un insuccesso".

Indichiamo con: 1 = successo, 0 = fallimento

$p(1) = P(X = 1) = p$

$p(0) = P(X = 0) = q = 1 - p$

La variabile aleatoria di Bernoulli con parametro p

$\boxed{E[X]} = 0\,(1 - p) + 1\,p = \boxed{p}$

$\boxed{VAR[X]} = (0-p)^2(1-p)+(1-p)^2 p = \boxed{p(1-p)}$

La variabile aleatoria binomiale con parametri (n, p)

n esperimenti indipendenti

Risultato singolo esperimento: successo con probabilità p

X rappresenta il numero di successi negli n esperimenti

$$\boxed{p(i) = \binom{n}{i}\, p^i\, (1-p)^{n-1}}$$

$$\sum_{i=0}^{n} p(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1 - p))^n = 1$$

Nota: $X=X_1+\ldots+X_n$, dove $X_1,\ldots,X_n$ sono le v.a. bernoulliane associate agli n esperimenti

7. Prove ripetute

Se è nota la probabilità che si verifichi un evento in una prova, la probabilità che lo stesso evento si presenti una volta, due volte, eccetera, in n prove è data dai termini successivi dello sviluppo binomiale.

Infatti, indichiamo con p la probabilità che si verifichi l'evento e con q la probabilità dell'evento contrario (cioè che l'evento atteso non si verifichi). Se selezioniamo un particolare insieme di r prove sul numero complessivo delle n prove, la probabilità che l'evento si verifichi in tutte queste r prove e non si presenti nelle altre (n-r) è:

$$p^r \cdot q^{n-r}$$

Ma un insieme di r prove può essere selezionato tra le n in C(n,r) modi diversi, tutti ugualmente possibili. Quindi la probabilità che l'evento si presenti in r prove è uguale a:

$$C(n,r).p^r.q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.p^r.q^{n-r}$$

La probabilità che l'evento si verifichi almeno r volte è uguale alla somma dei primi (n-r+1) termini.

Media aritmetica della distribuzione binomiale

$$M = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n} x_i.f_i = \sum_{i=0}^{n} x_i.P(x_i)$$

e poiché

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}.p^x.q^{n-x}$$

si avrà che la media aritmetica è uguale a:

$$M = \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!}.p^x.q^{n-x}.x = np.\sum_{x=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}.p^{x-1}.q^{n-x} =$$

$$= np.(p+q)^{n-1} = n.p \qquad \textbf{\textit{(p+q)=1}}$$

La media aritmetica della distribuzione binomiale è quindi data dalla relazione M = n.p .

Varianza della distribuzione binomiale

Per la determinazione del momento secondo rispetto all'origine valgono le seguenti relazioni:

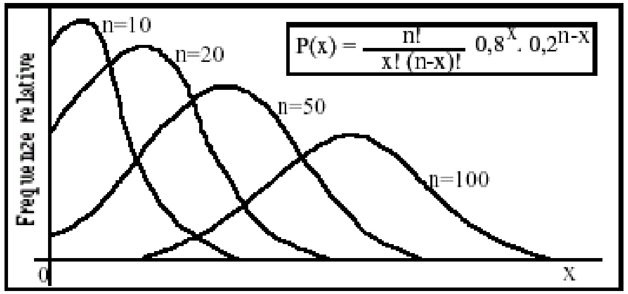
$$M_2 = \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2.P(x_i) = \sum_{x=0}^{x=n} x^2.\frac{n!}{x!(n-x)!}.p^x.q^{n-x} =$$

$$= np + n^2p^2 - np^2$$

Nella distribuzione binomiale la varianza è inferiore alla media; infatti essa è uguale alla media n.p moltiplicata per un numero che è inferiore all'unità [q=(1-p)].

La variabile aleatoria binomiale con parametri (n, p)

L'equazione della funzione binomiale mostra che la forma della curva binomiale dipende dai valori n, p e q. Per valori di n molto grandi, anche quando p e q sono molto diversi tra loro, la curva binomiale assume una forma approssimativamente simmetrica, ma quando n è piccolo e p e q sono molto diversi tra loro, la curva appare asimmetrica, con asimmetria tanto maggiore quanto più diversi sono i valori di p e di q e quanto più piccolo è il numero delle osservazioni n.



Esempi

Se lanciamo un dado 6 volte, la probabilità di avere 1 per 4 volte è pari a:

$$p = \frac{6!}{4!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 15.\frac{25}{6^6} = \frac{375}{46656}$$

Ma la probabilità di avere 1 almeno 4 volte è uguale alla somma dei primi tre termini:

$$C(6,4).p^4.q^2 + C(6,5).p^5.q + C(6,6).p^6 =$$

$$= 15.\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 6.\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^6 =$$

$$= \frac{15.25 + 6.5 + 1}{6^6} = \frac{375 + 30 + 1}{46656} = \frac{406}{46656}$$

I coefficienti dello sviluppo del binomio possono essere ottenuti con facilità dal "triangolo di Pascal", che si presenta come segue:

Triangolo di Pascal

Valori di n	**Coefficienti in (a+b)n**
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Esempi

- Lancio di quattro monete. Qual è la probabilità che siano ottenute due “teste” e due “croci” ?
- Un sistema di produzione realizza articoli con una difettosità pari a 0,1. Qual è la probabilità che in un campione di tre articoli ve ne sia non più di uno difettoso.

La variabile aleatoria binomiale con parametri (n, p)

$E[X] = n\,p$

$VAR[X] = n\,p\,(1\text{-}p)$

Dim.
$E[X]=E[X_1+\ldots+X_n]= \ldots$

$VAR[X]=VAR[X_1+\ldots+X_n]= \ldots$

La variabile aleatoria geometrica con parametro p

Una serie di esperimenti indipendenti

Risultato singolo esperimento: successo con probabilità p

X rappresenta il numero di esperimenti che occorre realizzare per ottenere il primo successo

$$p(n) = P(X = n) = p\,(1\text{-}p)^{n-1}$$

Esempio

Un dado viene lanciato più volte finchè non si ottiene 6. Qual è la probabità che occorrano esattamente k lanci ?

La variabile aleatoria geometrica con parametro p

$$E[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p\,(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n\,q^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d\,q^n}{d\,n} =$$

$$= p\,\frac{d \sum_{n=1}^{+\infty} q^n}{d\,n} = p\,\frac{d\,(\frac{1}{1-q} - 1)}{d\,q} = p\,\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

La variabile aleatoria di Poisson con parametro λ

Variabile aleatoria X

$$p(i) = P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \qquad (i = 0, 1, \dots)$$

Esempio

Numero di incidenti al giorno sull'autostrada BO-TA ~ Poisson (λ=3).

Qual è la probabilità che vi sia almeno un incidente in un giorno ?

Proprietà

La v.a. di Poisson approssima bene la v.a. binomiale quando n è grande e p è piccolo (λ = n p).

i	0	1	2	3	4	5
Binomiale	.366	.370	.185	.0610	.0149	.0029
Di Poisson	.368	.368	.184	.0613	.0153	.00307

Raffronto fra la distribuzione binomiale e quella di Poisson per $n = 100$, $p = 1/100$, e $\lambda = np = 1$.

La variabile aleatoria di Poisson con parametro λ

$E[X] = \lambda$

$VAR[X] = \lambda$

Esercizio 1

Sapendo che il 30% dei passeggeri non si presenta alla partenza, una compagnia aerea accetta fino a 28 prenotazioni su un volo con capienza di 24 posti.

Qual è la probabilità che un passeggero che ha regolarmente prenotato resti a terra ?

Esercizio 2

Nel lancio di un dado supponiamo di non avere ottenuto il 6 nelle prime k prove.

Qual è la probabilità di dover attendere ancora m prove per avere il primo 6 ?

Mancanza di memoria della distribuzione geometrica.

Esercizio 3

Uno studente completamente impreparato sostiene un test a risposte multiple contenente 30 domande con 5 alternative cadauna.

Qual è la probabilità che egli risponda correttamente ad almeno 16 domande?