6

Coppie di variabili aleatorie

Distribuzione di probabilità congiunta

X e Y v.a. discrete

Si definisce la distribuzione di probabilità congiunta:

$$p_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

Le distribuzioni di probabiltà marginali sono:

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)$$

$$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

Distribuzione di probabilità congiunta

X e Y v.a. discrete

g(X,Y): funzione delle due variabili aleatorie X e Y

g(X,Y) è essa stessa una v.a.

$$E[g(X,Y)] = \sum_{x,y} g(X,Y)\, p_{XY}(x,y)$$

Distribuzione di probabilità congiunta

X e Y v.a. discrete

g(X,Y)=XY

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy\; p_{XY}(x,y)$$

V.a. indipendenti

X e Y sono indipendenti se:

$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)\ P(Y \leq y) \qquad \forall x, y$

Esercizio. Dimostrare che, se X e Y sono statisticamente indipendenti,

$p_{XY}(x,y) = p_X(y)\ p_Y(y) \qquad \forall x, y$

V.a. indipendenti

X e Y indipendenti $\Rightarrow$

E[XY] =E[X] E[Y]

L'implicazione $\Leftarrow$ non vale

Covarianza di due variabili aleatorie discrete

La covarianza tra le variabili aleatorie *X* e *Y* è definita come:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Covarianza di due variabili aleatorie discrete

$$\boxed{Cov(X,Y)} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$= \boxed{E(XY) - E(Y)E(X)}$$

Covarianza di una variabile con se stessa

E' chiaro che la covarianza di una variabile con se stessa non è altro che la varianza:

$$\boxed{Cov(Y,Y)} = E[(Y-E(Y))(Y-E(Y))]$$

$$= E\left[(Y-E(Y))^2\right] = \boxed{\sigma^2(Y)}$$

Covarianza di due variabili aleatorie

Proprietà. Se X e Y sono indipendenti, COV (X, Y) = 0.

Dimostrazione: banale.

Osservazione: l'implicazione inversa non vale

Covarianza di due variabili aleatorie

Proprietà.

VAR[X+Y] = VAR[X]+VAR[Y]+2COV (X, Y)

X e Y incorrelate: =VAR[X]+VAR[Y]

Dim.

Coefficiente di correlazione

Una volta definita la covarianza, possiamo definire il coefficiente di correlazione:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Coefficiente di correlazione

- Il coefficiente di correlazione non è altro, dunque, che una covarianza standardizzata.

Coefficiente di correlazione

Si dimostra che:

1) se X e Y sono indipendenti, $\rho_{xy} = 0$;

2) $|\rho_{xy}| \leq 1$;

3) se $X = k Y$, $\rho_{xy} = 1$ se $k > 0$ oppure $\rho_{xy} = -1$ se $k < 0$.

Coefficiente di correlazione

Il segno e il valore assoluto di *r* forniscono dunque un'indicazione della dipendenza lineare reciproca tra due variabili aleatorie.

Esercizio

Le variabili X e Y sono indipendenti, di media E[X]=2, E[Y]=1 e varianza VAR[X]=1, VAR[Y]=4. Trovare la media e la varianza delle variabili:

a. Z=X-2Y
b. Z'=2X-Y

Esercizio

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di Bernoulli con parametro $p > 0$. Posto $Z=XY$, calcolare:

- la distribuzione di Z condizionata a $X=1$;
- la distribuzione di X condizionata a $Z=0$

Esercizio

Siano $X_1, \ldots, X_n$ indipendenti ed equidistribuite con media μ e varianza σ^2.

(i) Determinare la media e la varianza della media aritmetica di $X_1, \ldots, X_n$:

$$Z = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

(ii) Trasformare Z in una variabile aleatoria con media nulla e varianza unitaria.

(iii) I risultati dipendono dal tipo di distribuzione di $X_1, \ldots, X_n$?

Esercizio

Siano X e Y due variabili casuali, a valori interi, indipendenti e con la stessa distribuzione $p_X(k)=p_k$ con $k=0, 1, 2, \ldots$

Calcolare $\text{Prob}(X \leq Y)$.