7

Variabili aleatorie continue

Distribuzione cumulata di probabilità di una v.a. continua

Variabile aleatoria continua: il codominio è un insieme infinito non numerabile

$$\boxed{P\{X = x\} = 0} \quad \forall\, x$$

"Non è possibile estendere la nozione di funzione di probabilità introdotta nel caso delle variabili discrete"

Si definisce preliminarmente la nozione di Funzione di Distribuzione di Probabilità, analogamente al caso di v.a. discrete:

$$F_X(\bar{x}) = \text{Prob}\left[X \le \bar{x}\right]$$

(la Funzione di Distribuzione di Probabilità è sempre monotona crescente)

Distribuzione cumulata di probabilità di una v.a. continua

Distribuzione cumulata di probabilità (funzione di distribuzione di probabilità, CDF):

$$\boxed{F(x) = P\{X \le x\}}$$

Proprietà

(i) F(x) è una funzione non decrescente di x

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

(iii) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

Distribuzione cumulata di probabilità di una v.a.

$$\boxed{P(a < X \le b) = F(b) - F(a)}$$

Densità di probabilità di una v.a. continua

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{d\,x}$$

Si noti che $f_X(x) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{x}$

$f(x)\,\varepsilon \cong P(x - (\varepsilon/2) \leq X \leq x + (\varepsilon/2))$

In precedenza abbiamo osservato che, nel caso di una variabile aleatoria discreta *Y*, la probabilità $P(c \leq Y \leq d)$ è uguale all' **area delle barre dell'istogramma** che rappresenta la distribuzione di probabilità di *Y* nell'intervallo [*c*, *d*]

Anche nel caso di una variabile aleatoria continua *X*, dunque, potremmo aspettarci che $P(c \leq X \leq d)$ sia uguale all'**area sottesa alla funzione di densità *f*(*x*) nell'intervallo [*c*, *d*].** Infatti, è proprio così.

Funzione di densità di probabilità

Densità di probabilità di una v.a. continua

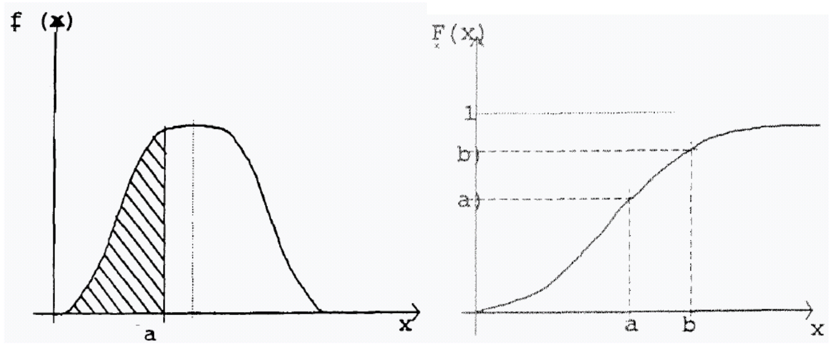
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

$$P(X \in B) = \int_{x \in B} f(x)\, dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Si dimostra che:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$



Densità di probabilità di una v.a. continua

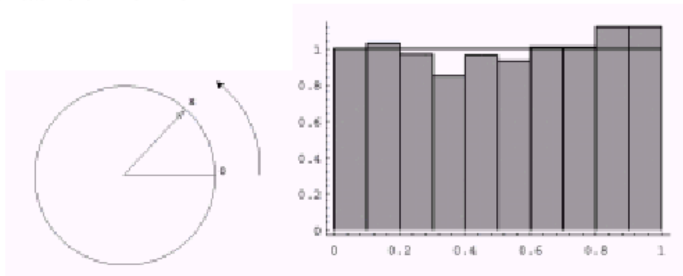
$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx \quad \text{Per def. di prob.} \Rightarrow F_X(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

$$P(X \in (-\infty, +\infty)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$P(X = a) = \int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

La variabile aleatoria uniforme

Variabile uniforme



$$P(0 \leq X \leq 1)$$

$$P\left(0 \leq X < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} \leq X < 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$P(c \leq X < d) = d - c$$

$$P(E) = \int_E f(x)\, dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

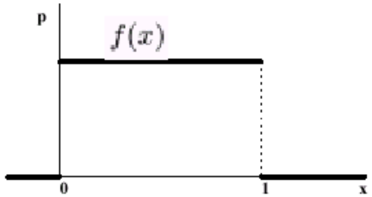
Funzioni densità e distribuzione di probabilità

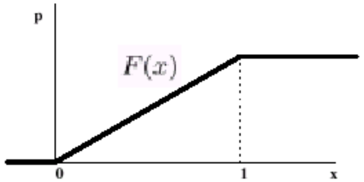
$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

F(x)=x f(x)=1 0≤x≤1

Variabile uniforme





Funzione densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$P\left(0 \leq X < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} \leq X < 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$P(E) = \int_0^{1/2} 1\,dx = \frac{1}{2}$$

$$P(E) = \int_a^b 1\,dx = b - a$$

Funzione di distribuzione di probabilità

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

La variabile aleatoria uniforme

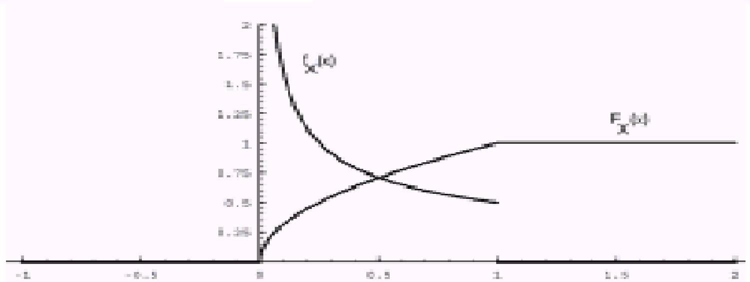
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & se\, \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F(x) = ?$$

Variabile X = U^2 (U=var. unif.)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(U^2 \leq x) \\ &= P(U \leq \sqrt{x}) \\ &= \sqrt{x}\,. \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$



$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq 0, \\ 1/(2\sqrt{x}), & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

La variabile aleatoria esponenziale

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

Distribuzione normale

Una variabile aleatoria X ha una distribuzione normale se la funzione di densità di X è:

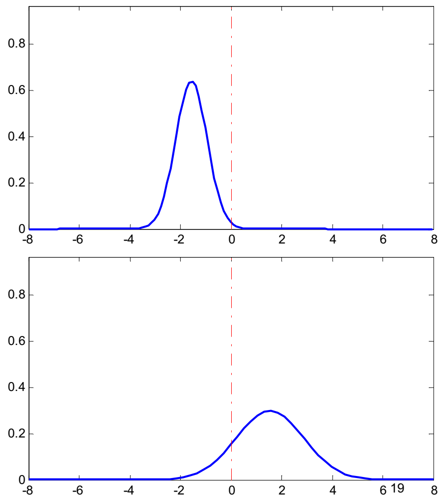
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

dove e è una costante con il valore di 2,771828, μ è la media della distribuzione e σ^2 è la varianza della distribuzione.

Distribuzione normale

(continua)

Si noti che la funzione di densità normale contiene due parametri: μ e σ.



Distribuzione normale

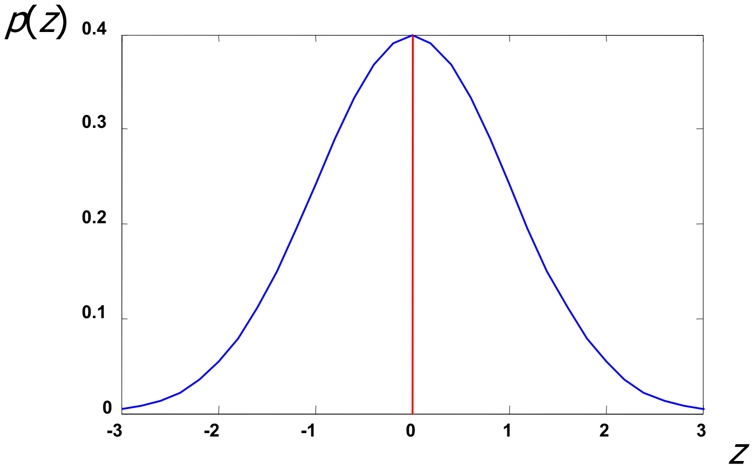
(continua)

Dato che la distribuzione normale specifica una famiglia di distribuzioni è vantaggioso considerare questa distribuzione nel caso di una variabile aleatoria standardizzata:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Distribuzione normale

(continua)



Esempio

Se una distribuzione normale ha una media di 50 e scarto quadratico medio uguale a 5, qual è la **probabilità** cumulativa corrispondente al punteggio di 57,5 (ovvero, qual è **l'area sottesa alla curva** nell'intervallo [-∞, 57,5])?

Esempio

(continua)

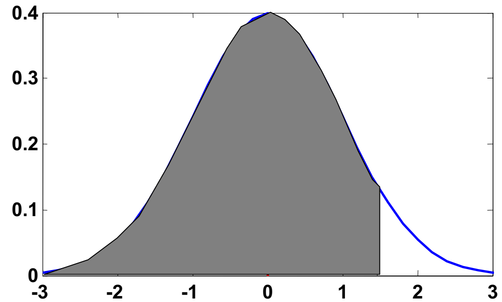
Calcoliamo il punteggio standardizzato:

$$z = \frac{57{,}5 - 50}{5} = 1{,}5$$

A questo punto possiamo consultare le tabelle della distribuzione normale standardizzata e trovare il valore della probabilità cumulativa corrispondente ad un punto z di 1,5. Questo valore è $\approx$ 0,9332.

Esempio

$$z = \frac{57{,}5 - 50}{5} = 1{,}5$$



Esempio

Consideriamo una distribuzione normale avente media 107 e scarto quadratico medio 70. Qual è il valore della probabilità cumulativa per $X = 100$ (ovvero, qual è **l'area sottesa alla curva** nell'intervallo [-∞, 100])?

Esempio

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 107}{70} = -0{,}6714$$

La probabilità $P(-\infty < z < -0{,}6714)$ è uguale a 0,2510.

Come trovare questo valore dato che le tabelle riportano solo valori z positivi?

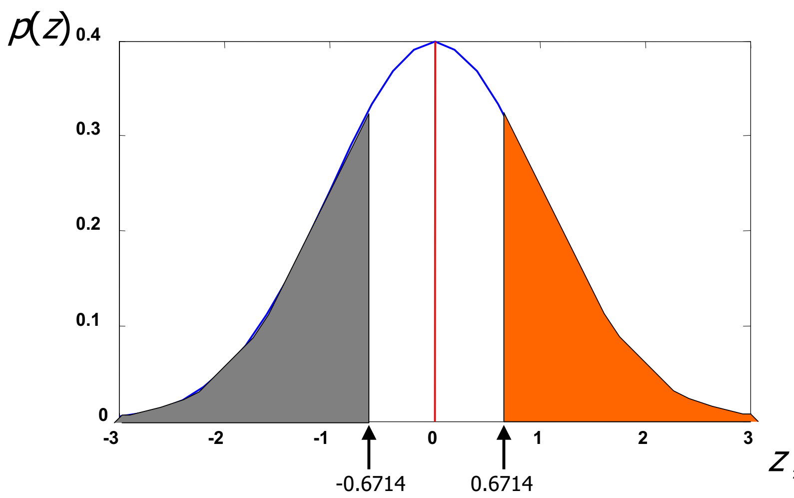
Esempio

Nelle tabelle troviamo che la probabilità cumulativa per $z = 0{,}6714$:

$$P(-\infty < z < 0{,}6714) = 0{,}7490.$$

Questo valore corrisponde a tutta l'area sottesa alla curva normale standardizzata meno quella parte che è evidenziata in rosso nella figura seguente.

Esempio



Esempio

Dato che la curva è simmetrica, è ovvio che l'area cercata (ovvero, quella evidenziata in grigio e che corrisponde al valore z = -0,6714) è uguale a:

$P(-\infty < z < -0{,}6714) = 1 - 0{,}7490 = 0{,}2510$

Esempio

Qual è la proporzione di casi della distribuzione normale compresa nell'intervallo tra $\pm$ 1 scarto quadratico medio dalla media?

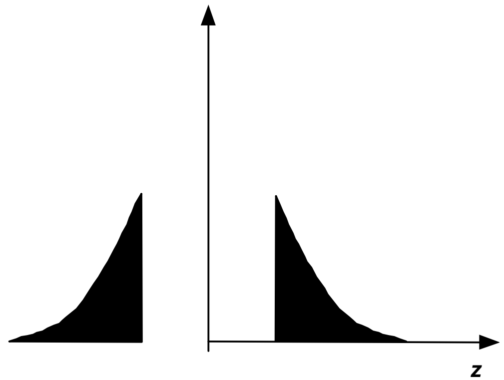
Esempio

(continua)

Questa domanda può essere riformulata chiedendoci qual è la probabilità che z si trovi nell'intervallo $(-1 \le z \le 1)$. Nella distribuzione normale standardizzata, infatti lo scarto quadratico medio ha valore 1.

Esempio

(continua)



$$P(-1 \le z \le 1) = 1 - 2(0.1587) = 0.6826$$

Esempio

(continua)

Questo significa che circa il 68% dei casi in una distribuzione normale standardizzata si trova nell'intervallo compreso tra ±1 scarto quadratico medio dalla media.

Esempio

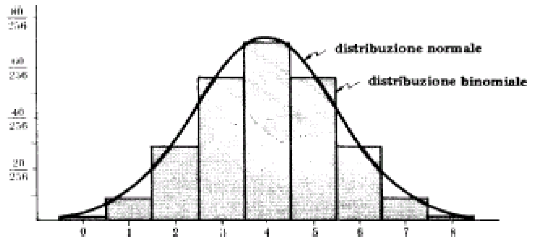
(continua)

Per esempio, supponiamo di estrarre un'osservazione da una distribuzione normale standardizzata e di ripetere questa operazione per un grande numero di volte, *n*. Se calcolassimo la frequenza relativa dell'evento per cui l'osservazione estratta ha un valore compreso tra ± 1, il risultato sarebbe uguale a circa 0,68%.

Approssimazione normale della binomiale

Approssimazione normale della distribuzione binomiale. La distribuzione binomiale P(k)=b*(k;n,p)* viene approssimata dalla distribuzione normale purché n sia grande e né p né q siano molto piccoli. Nel diagramma seguente è scelta la distribuzione binomiale corrispondente a n = 8 e p = q =1/2.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(k)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$



Esempio

ESEMPIO Trovare la probabilità che, in 10 lanci di una moneta, testa si presenti da 3 a 6 volte comprese. Si usi (a) la distribuzione binomiale, (b) l'approssimazione normale alla distribuzione binomiale.

Soluzione (a):

$$\Pr\{3 \text{ teste}\} = \frac{15}{128}$$

$$\Pr\{4 \text{ teste}\} = \frac{105}{512}$$

$$\Pr\{5 \text{ teste}\} = \frac{63}{256}$$

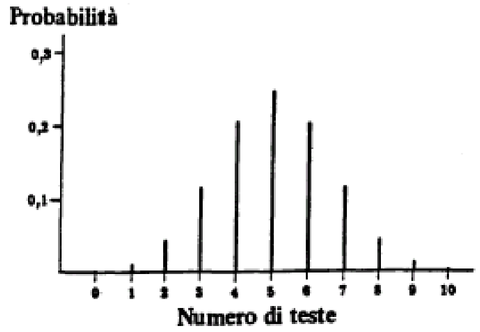
$$\Pr\{6 \text{ teste}\} = \frac{105}{512}$$

Quindi P(x fra 3 e 6 teste comprese)=

$$\} = \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = \frac{99}{128} = 0.7734$$

Esempio

Soluzione (b): La distribuzione di probabilità dei numero di teste in 10 lanci di una moneta è visibile in nelle fig.:

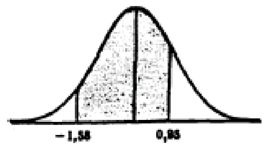


Esempio

La media e la varianza della distribuzione binomiale sono date da:

$\mu = Np = 10(1/2) = 5$

$$\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{10 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}} = 1{,}58$$



- 2,5 in unità standard vale (2,5 - 5)/1,58 = -1,58
- 6,5 in unità standard vale (6,5 - 5)/1,58 = 0,95

Probabilità richiesta = (area tra z = -1,58 e z = 0,95) =
=(area tra z = -1,58 e z = 0) + (area tra z = 0 e z = 0,95)=
=0,4429 + 0,3289 = 0,7718

Molto vicino al valore vero 0,7734 ottenuto al punto (a).
L'approssimazione è anche migliore per valori più grandi di N.

Valore atteso di una v.a. continua

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

Valore atteso variabile uniforme

$$E(X) = \int_0^1 x\, dx = 1/2$$

Varianza variabile uniforme

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

$$V(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

Valore atteso di una v.a. continua

v.a. uniforme in [a,b]: E[X] =

$$\int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

v.a. esponenziale: E[X] = $\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \ldots = \frac{1}{\lambda}$

(integrazione per parti)

v.a. normale: E[X] = μ (porre $x = (x - \mu) + \mu$, sostituire $(x - \mu)$ con y, sfruttare la simmetria)

Varianza di una v.a. continua

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$VAR[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)\, dx$$

Varianza di una v.a. continua

X v.a. uniforme in [a,b]: VAR[X]=?

X v.a. esponenziale con parametro λ: VAR[X]=?

X v.a. normale con parametri μ e σ: VAR[X]=σ^2

Problema

X v.a. (non necessariamente normale) con parametri μ e σ

$$Z=(X-\mu)/\sigma$$

$$E[Z]= ?$$

$$VAR[Z]= ?$$

V.a. normale standard

Z v.a. normale con parametri $\mu'=0$ e $\sigma'=1$

Se X è una v.a. normale con parametri μ e σ,

$$Z=(X-\mu)/\sigma$$

è una normale standard

Esercizio 1

La densità di probabilità congiunta di due v.a. X e Y è data da

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} a\,(x\,y + x) & \text{per } 1 \le x \le 2 \text{ e } 1 \le y \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare la costante "a".

(b) Determinare le densità di probabilità (marginali) delle due v.a..

(c) Stabilire se le due v.a. sono indipendenti.

(d) Calcolare il coefficiente di correlazione delle due v.a..

Esercizio 2

Dimostrare che, se X è una v.a. esponenziale con parametro λ, Y=5X è una v.a. esponeziale.

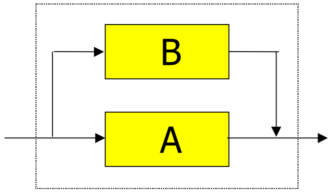
Quanto vale il parametro di Y?

Esercizio 5

Il diametro di un rotore deve essere compreso nell'intervallo 1.8 m $\pm$ 0.01 m. Dalle rilevazioni effettuate sulle serie storiche del processo produttivo è emerso che la grandezza è distribuita normalmente con media μ=1.8 m e scarto quadratico medio σ= 0.06 m.

Quanto vale la percentuale di rotori difettosi ?

Esercizio 7



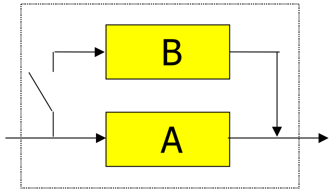
T_A = tempo di vita sottosistema A: v.a. esp. parametro λ_A=1/(3 anni)

T_B = tempo di vita sottosistema B: v.a. esp. parametro λ_B =1/(5 anni)

T = tempo di vita sistema

Determinare la distribuzione di probabilità di T ed il tempo di vita medio del sistema.

Esercizio 8



T_A = tempo di vita sottosistema A: v.a. esp. parametro λ_A=1/(3 anni)

T_B = tempo di vita sottosistema B: v.a. esp. parametro λ_B =1/(5 anni)

T = tempo di vita sistema

Determinare la distribuzione di probabilità di T ed il tempo di vita medio del sistema.