Probabilità

Applicazione delle regole dell'addizione

1 Si determini la probabilità di ottenere una figura (un re *(K)*, una donna *(D)* o un fante *(J)*) nell'estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte.
Si ha:

$$P(K \cup D \cup J) = P(K) + P(D) + P(J) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

(Nota.- gli eventi sono incompatibili).

2 Su 600 studenti di ingegneria, 200 sono attualmente iscritti al corso di ricerca operativa e 160 al corso di probabilità e statistica. Questi dati includono 60 studenti che sono iscritti ad entrambi i corsi. Qual è la probabilità che uno studente scelto a caso sia iscritto al corso di ricerca operativa (A) o a quello di probabilità e statistica (B)?

si ha:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

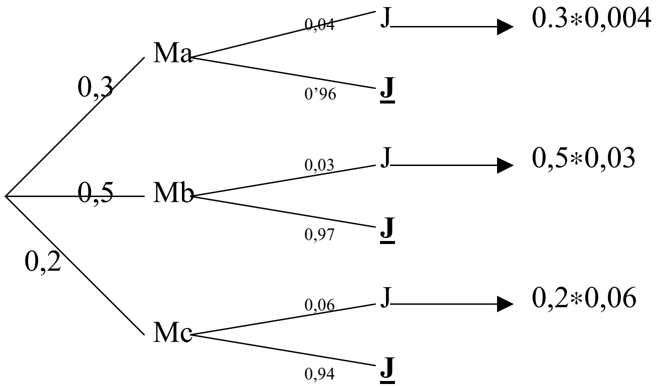
$$= \frac{200}{600} + \frac{160}{600} - \frac{60}{600} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(Nota: gli eventi sono compatibili).

ESERCIZIO PROBABILITA' TOTALE

Tre macchine Ma, Mb, Mc, producono microchip ognuna delle quali nella quantità rispettivamente del 30%, il 50%, ed il 20% del totale dei pezzi prodotti in fabbrica. Il margine di errore dovuto alla difettosità per le tre macchine è rispettivamente del 4%, del3%, del 6%.Viene estratto un pezzo a caso dal lotto dei pezzi prodotti: determinare la probabilità che esso sia difettoso.

$P(J) = P(Ma) * P(J/Ma) + P(Mb) * P(J/Mb) + P(Mc) * P(J/Mc) = 0{,}039 = 3{,}9\%$.

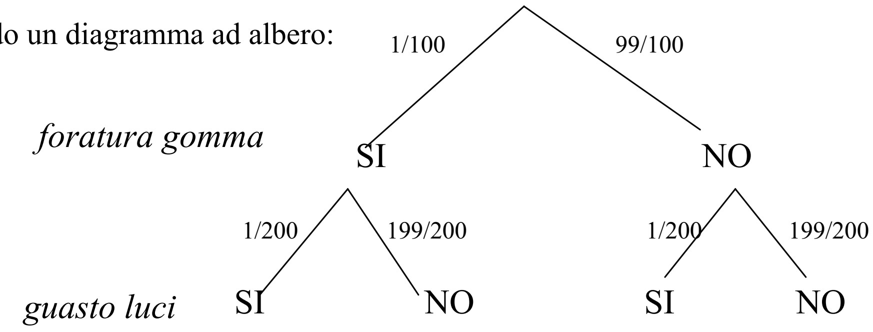


ESERCIZIO EVENTI COMPOSTI

Un'autista ritiene di avere probabilità pari a 1/100 di forare una gomma durante un certo viaggio e probabilità 1/200 di avere sullo stesso tragitto un guasto all'impianto d'illuminazione.

Qualè la probabilità che non abbia nessuno dei due inconvenienti?

Utilizzando un diagramma ad albero:

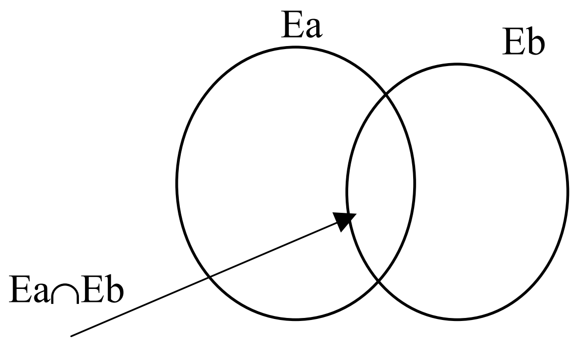


Possiamo verificare che, l'evento richiesto coincide con l'ultimo percorso a destra; la probabilità è:

$$P=[(99/100)*(199/200)]=0{,}985.$$

ESERCIZIO PROBABILITÀ CONDIZIONATA

All'uscita del reparto di montaggio un tipo di elettrodomestico presenta in media dei difetti nella parte meccanica nel 10% dei casi e difetti nella parte elettrica nel 8% dei casi; inoltre lo 0,2% delle unità prodotte presenta entrambi i tipi di difetto. Qual'e la probabilità che un elettrodomestico trovato difettoso nella parte meccanica lo sia anche in quella elettrica.



Si ha $p(Ea) = 0{,}1$

$p(Eb) = 0{,}08$

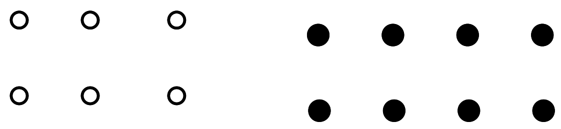
$p(Ea \cap Eb) = 0{,}002$

allora:

$$p(Eb/Ea) = p(Ea \cap Eb) / p(Ea) = 0{,}002/0{,}1 = 0{,}02$$

Notare come il risultato ottenuto per p (Eb/Ea) è diverso da p (Eb) e quindi il verificarsi di Ea condiziona il verificarsi di Eb.

ESERCIZIO : Se si estraggono 4 biglie da un'urna che ne contiene 6 bianche e 8 rosse e si esegue poi una seconda estrazione di 4 biglie, dopo aver rimesso nell'urna le 4 estratte la prima volta, qual'è la probabilità che la prima estrazione dia come risultato 4 biglie bianche e la seconda 4 biglie rosse?



Il numero dei modi in cui 4 biglie possono essere estratte dal numero complessivo di 14 biglie presenti nell'urna è pari a C(14,4).

$$C(14,4)=\frac{14!}{4!10!!}$$

Il numero dei modi in cui 4 biglie bianche possono essere estratte dall'urna che ne contiene 6 è pari a C(6,4), mentre il numero dei modi in cui 4 biglie rosse possono essere estratte da un'urna che ne contiene 8 è pari a C(8,4).Pertanto, la probabilità di avere 4 biglie bianche nella prima estrazione è data dalla relazione:

$$\frac{C(6,4)}{C(14,4)}=\frac{\frac{6!}{4!2!}}{\frac{14!}{4!10!!}}=\frac{6!4!10!}{4!2!14!}=\frac{6.5.4.3}{14.13.12.11}=\frac{30}{2002}=\frac{15}{1001}$$

La probabilità di avere 4 biglie rosse nella seconda estrazione sarà:

$$\frac{C(8,4)}{C(14,4)}=\frac{\frac{8!}{4!4!}}{\frac{14!}{4!10!!}}=\frac{8!4!10!}{4!4!14!}=\frac{8.7.6.5}{14.13.12.11}=\frac{140}{2002}=\frac{70}{1001}=\frac{10}{143}$$

Infine, la probabilità dell'evento composto sarà pari a:

$$\frac{15}{1001}\cdot\frac{70}{1001}=\frac{1050}{1002001}\approx\frac{1}{1000}$$

Se vi sono n eventi indipendenti, le probabilità corrispondenti al verificarsi di ciascuno di essi separatamente, come si è visto, sono p1, p2, p3,.....pn, mentre la probabilità dell'evento composto è pari a p1.p2.p3......pn . Ma, per esempio, la probabilità che i primi tre eventi si verifichino e gli altri (n-3) non si verifichino, sarà data dal prodotto p1.p2.p3.(1-p4)......(1-pn).

Esempio II.3

Un dado viene tirato per 5 volte. Trovare la probabilità che la faccia con il 3 appaia nelle prime 2 prove.

Tale probabilità si otterrà con il seguente prodotto:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{8376}$$

Ma se la domanda fosse un poco diversa e, ad esempio, ci fosse stato richiesto di trovare la probabilità che la faccia con il 3 appaia proprio 2 volte sui 5 lanci, allora la risposta avrebbe dovuto essere:

$$C(5,2).\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{125}{8376}=\frac{1250}{8376}$$

perché vi sono C(5,2) modi diversi di combinare 2 prove su 5.

Per trovare la probabilità che almeno uno di n eventi indipendenti si verifichi, si deve ragionare come segue: la probabilità che nessuno degli n eventi si presenti è (1-p1).(1-p2)..........(1-pn), se le probabilità di verificarsi dei singoli eventi separatamente sono p1, p2, p3,......pn.

Ma se nessuno degli n eventi non si verifica, questo fatto sta a significare che almeno uno di essi si verificherà e quindi la probabilità cercata sarà pari a:

$$1 - (1-p1).(1-p2)..........(1-pn),.$$

Esempio II.4

Una carta viene estratta a caso da un mazzo di 52 carte e poi è rimessa nel mazzo; viene quindi estratta una seconda carta dallo stesso mazzo.
Qual'è la probabilità che l'asso di spade si presenti almeno una volta?
Per risolvere questo quesito si applica il metodo che segue, il quale permette di trovare con sufficiente facilità la soluzione di parecchi problemi di natura abbastanza simile a quello qui considerato.
La probabilità che l'asso di spade non si presenti in nessuna delle due estrazioni è:

$$\frac{51}{52}\cdot\frac{51}{52}=\frac{2601}{2704}$$

La probabilità di ottenere almeno un asso di spade è quindi:

$$\left(1-\frac{2601}{2704}\right)=\frac{103}{2704}$$

IL PROBLEMA DEL COMPLEANNO

Qual è la probabilità che in un gruppo di r persone vi siano almeno due con la stessa data di nascita?

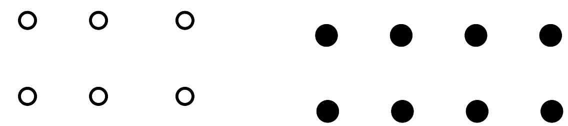
Risposta:

1-) $$p_r = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-r+1)}{365^r}$$

10	.8830518
20	.5885616
30	.2936838
40	.1087682
50	.0296264
60	.0058773
70	.0008404
80	.0000857
90	.0000062
100	.0000003
20	.5885616
21	.5563117
22	.5243047
23	.4927028
24	.4616557
25	.4313003

7

ESERCIZIO : Se si estraggono 4 biglie da un'urna che ne contiene 6 bianche e 8 rosse e si esegue poi una seconda estrazione di 4 biglie, dopo aver rimesso nell'urna le 4 estratte la prima volta, qual'è la probabilità che la prima estrazione dia come risultato 4 biglie bianche e la seconda 4 biglie rosse?



Il numero dei modi in cui 4 biglie possono essere estratte dal numero complessivo di 14 biglie presenti nell'urna è pari a C(14,4).

$$C(14,4)=\frac{14!}{4!10!}$$

Il numero dei modi in cui 4 biglie bianche possono essere estratte dall'urna che ne contiene 6 è pari a C(6,4), mentre il numero dei modi in cui 4 biglie rosse possono essere estratte da un'urna che ne contiene 8 è pari a C(8,4).Pertanto, la probabilità di avere 4 biglie bianche nella prima estrazione è data dalla relazione:

$$\frac{C(6,4)}{C(14,4)} = \frac{\frac{6!}{4!2!}}{\frac{14!}{4!10!!}} = \frac{6!4!10!}{4!2!14!} = \frac{6.5.4.3}{14.13.12.11} = \frac{30}{2002} = \frac{15}{1001}$$

La probabilità di avere 4 biglie rosse nella seconda estrazione sarà:

$$\frac{C(8,4)}{C(14,4)} = \frac{\frac{8!}{4!4!}}{\frac{14!}{4!10!!}} = \frac{8!4!10!}{4!4!14!} = \frac{8.7.6.5}{14.13.12.11} = \frac{140}{2002} = \frac{70}{1001} = \frac{10}{143}$$

Infine, la probabilità dell'evento composto sarà pari a:

$$\frac{15}{1001} . \frac{70}{1001} = \frac{1050}{1002001} \approx \frac{1}{1000}$$

Se vi sono n eventi indipendenti, le probabilità corrispondenti al verificarsi di ciascuno di essi separatamente, come si è visto, sono p1, p2, p3,.....pn, mentre la probabilità dell'evento composto è pari a p1.p2.p3......pn . Ma, per esempio, la probabilità che i primi tre eventi si verifichino e gli altri (n-3) non si verifichino, sarà data dal prodotto p1.p2.p3.(1-p4)......(1-pn).

ESERCIZIO: Un dado viene tirato per 5 volte. Trovare la probabilità che la faccia con il 3 appaia nelle prime 2 prove. Tale probabilità si otterrà con il seguente prodotto:

$$\frac{1}{6} . \frac{1}{6} . \frac{5}{6} . \frac{5}{6} . \frac{5}{6} = \frac{125}{8376}$$

ESERCIZIO: Ma se la domanda fosse un poco diversa e, ad esempio, ci fosse stato richiesto di trovare la probabilità che la faccia con il 3 appaia proprio 2 volte sui 5 lanci, allora la risposta avrebbe dovuto essere:

$$C(5,2) . \frac{1}{6} . \frac{1}{6} . \frac{5}{6} . \frac{5}{6} . \frac{5}{6} = \frac{5!}{2!3!} . \frac{125}{8376} = \frac{1250}{8376}$$

perché vi sono C(5,2) modi diversi di combinare 2 prove su 5.

Per trovare la probabilità che almeno uno di n eventi indipendenti si verifichi, si deve ragionare come segue: la probabilità che nessuno degli n eventi si presenti è

(1-p1).(1-p2)..........(1-pn),

se le probabilità di verificarsi dei singoli eventi separatamente sono p1, p2, p3,......pn.

Ma se nessuno degli n eventi non si verifica, questo fatto sta a significare che almeno uno di essi si verificherà e quindi la probabilità cercata sarà pari a:

1 - (1-p1).(1-p2)..........(1-pn),.

ESERCIZIO: Una carta viene estratta a caso da un mazzo di 52 carte e poi è rimessa nel mazzo; viene quindi estratta una seconda carta dallo stesso mazzo. Qual'è la probabilità che l'asso di spade si presenti almeno una volta?
La probabilità che l'asso di spade non si presenti in nessuna delle due estrazioni è:

$$\frac{51}{52}\cdot\frac{51}{52}=\frac{2601}{2704}$$

La probabilità di ottenere almeno un asso di spade è quindi:

$$\left(1-\frac{2601}{2704}\right)=\frac{103}{2704}$$

ESERCIZIO: Supponiamo di estrarre una carta da un mazzo di 52 carte. Senza rimettere la carta estratta nel mazzo, ripetiamo l'operazione con una seconda carta. Qual'è la probabilità che tutte e due le carte siano rosse?

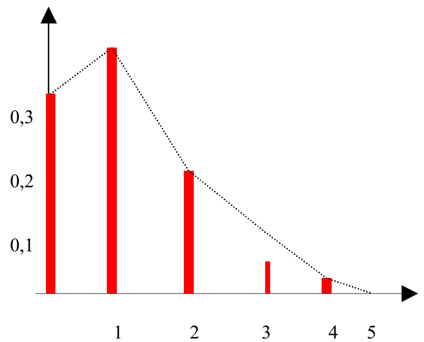
Indichiamo con p(x) la probabilità di estrarre una carta del colore desiderato nella prima estrazione. Allora p(y/x) rappresenterà la probabilità condizionata, cioè la probabilità di estrarre una carta dello stesso colore nella seconda estrazione:

$$\mathrm{p}(\mathrm{x})=\frac{1}{2} \qquad p(y/x)=\frac{25}{51}$$

e quindi la probabilità cercata è pari a:

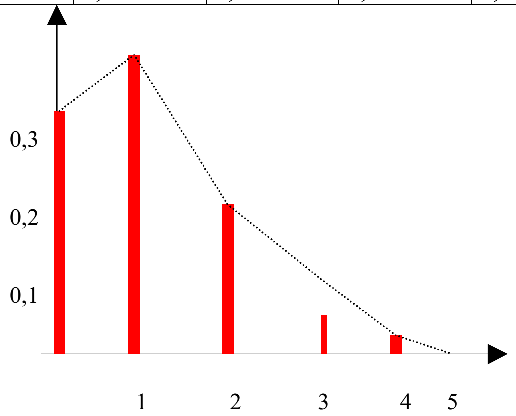
$$p(x,y)=p(x).p(y/x)=\frac{1}{2}.\frac{25}{51}=\frac{25}{102}$$

ESERCIZIO: In un'industria sono stati installati 5 macchinari uguali, ciascuno dei quali ha probabilità 0,20 di andare fuori servizio. Studiare la variabile casuale X (pari al numero delle macchine che può andare fuori servizio contemporaneamente), calcolando il valor medio di X e lo scarto quadratico medio. Calcolare la probabilità che più di due macchine vadano fuori servizio.



Considerando che la p = 0,2 e q = 0,8 si ha la seguente distribuzione di probabilità:

x	0	1	2	3	4	5
Px	0,32768	0,40960	0,20480	0,05120	0,00640	0,00032



La probabilità $P(X \geq 2)$ è data da :

$$P(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - (P_0 + P_1) = 0{,}26272$$

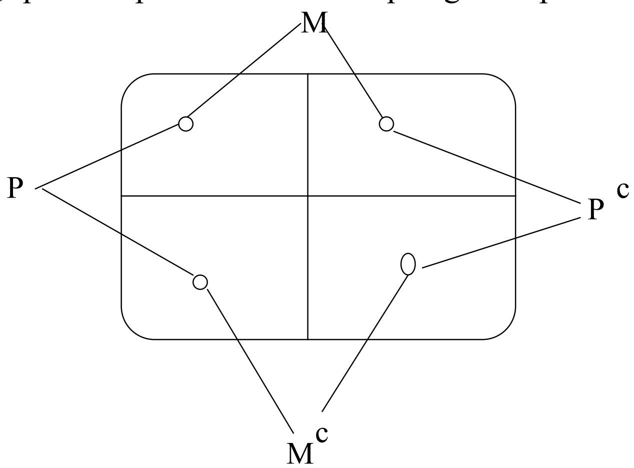
Il numero medio di macchinari guasti:

$$\mu = 5 * 0{,}2 = 1$$

Lo scarto quadratico medio :

$$\sigma = \text{sqr}(5 * 0{,}2 * 0{,}8) \cong 0{,}7348.$$

ESERCIZIO: Nella finale del GP nel mese di Aprile la probabilità che piova è pari allo 0,2, ora sapendo che il pilota della Mercedes in caso di pioggia ha lo 0,4, mentre in caso di buon tempo ha lo 0,7 di probabilità di vincere, supponendo che vinca il GP la Mercedes, qual è la probabilità che in quel giorno piovesse?



Valore atteso variabili discrete

$$E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

Valore atteso lancio del dado

$$\mu = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3{,}5 = \frac{7}{2}$$

Varianza lancio del dado

x	$p(x)$	$(x-7/2)^2$
1	1/6	25/4
2	1/6	9/4
3	1/6	1/4
4	1/6	1/4
5	1/6	9/4
6	1/6	25/4

$$E[(X-\mu)^2]$$

$$V(X) = \frac{1}{6}\left(\frac{25}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}\right) = \frac{35}{12},$$

$$D(X) = \sqrt{35/12} \approx 1.707$$

Varianza lancio del dado come differenza momenti

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) = 1\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)+9\left(\frac{1}{6}\right)+16\left(\frac{1}{6}\right)+25\left(\frac{1}{6}\right)+36\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{91}{6},$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

ESERCIZIO: Due dadi uno rosso (dado 1) e uno verde (dado 1) sono lanciati. Y è pari alla differenza fra i punteggi dei due dadi:

$$Y = x_1 - x_2$$

Calcolare la funzione di densità di probabilità ed il valore medio di Y.

Tavola 8-2 Differenze dei punteggi ottenuti lanciando due volte un dado

Differenza fra i due punteggi		Secondo lancio 1	2	3	4	5	6
Primo lancio	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
	2	1	0	−1	−2	−3	−4
	3	2	1	0	−1	−2	−3
	4	3	2	1	0	−1	−2
	5	4	3	2	1	0	−1
	6	5	4	3	2	1	0