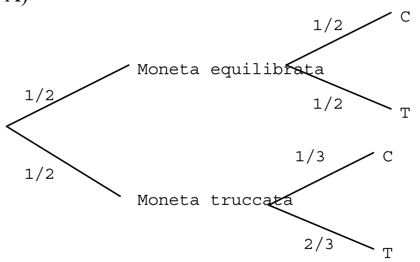
1

Una scatola contiene due monete di cui una equilibrata ed una truccata in modo che, una volta lanciata dia testa con probabilità 2/3. Le due monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle due monete. Indichiamo con X_i il risultato all'iesimo lancio pari a 1 per testa e 0 per croce.

A) Trovare la distribuzione di probabilità di X_1.
B) Quali sono il valor medio μ e la varianza σ^2 di X_1 ?
C) Si lancia la moneta 4 volte. Sia $Z=\Sigma X_i$ qual è il valore medio di Z?
D) Dopo aver sceltola moneta si deve testare se è o meno equilibrata si fa quindi l'ipotesi H0 che la moneta scelta sia quella buona e si testa la moneta lanciandola n volte. Si elabori una regola di decisione ed un valore di n per la quale la somma delle probabilità α e β connesse con un errore del primo e del secondo tipo sia inferiore a 0.05 (5%).

A)



P(X_i=1)=P(T)=1/4 + 1/3 =0.583333333
P(X_i=0)=P(C)=1/4 + 1/6 =0.416666667

B)μ=1***P(X_i=1)+0*P(X_i=0)=**0.583333333

$\sigma^2 = \sum P(X_i)\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ =0.5833*0.340278 + 0.416666* 0.173611=0.243056

oppure

$\sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2$ =0.583333 - 0.583333^2=243056

C) $E[Z]=E[\Sigma X_i] = \Sigma E[X_i] = \Sigma 0.5833$=4*0.5833=2.333333

E) Avendo libertà sulla scelta di n conviene prenderlo più alto possibile per migliorare la stima e ridurre gli errori!

Si pone

n=10 000

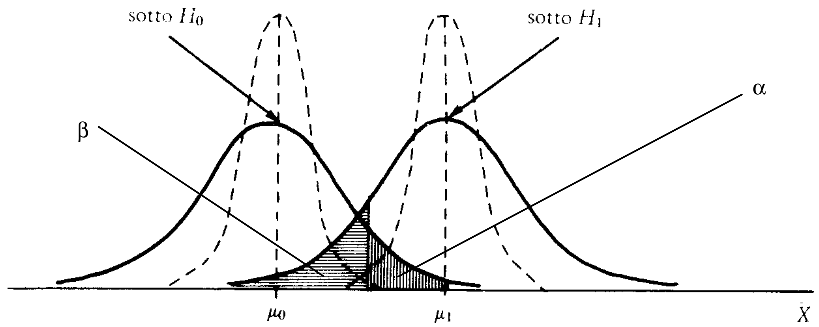
Il numero di teste su n lanci in media sarà
per la moneta regolare μ_0=p*n=10 000* .5 = 5000
per la moneta truccata μ_1=p*n=10 000 * 0.66666 = 6666
si fissa l' intervallo [0,6000] come zona di accettazione dell'ipotesi:

H0 p=0.5
Contro
H1 p=0.6666

a cui corrispondono gli intervalli nella gaussiana standard:

Sotto H0: [-100,20]
Sotto H1: [-141,-14]

Da cui si ottengono probabilità α e β pari a circa 0.



2

Si abbia un garage che svolge diverse operazioni di servizio su delle autovetture; il gestore verifica che il tempo medio di servizio su ogni cliente è pari a 20'.
E' noto il numero medio di macchine in arrivo giornaliero, durante le otto ore di lavoro:
10 unità
Facendo uso di un modello di coda M/M/1 determinare:
a) la probabilità di avere 0 elementi nel sistema;
b) il numero medio di macchine presenti nel garage;
c) la probabilità che ci siano più di 2 macchine nel garage.

Si ha :

λ= 10 / (60 *8) = 0.020833 (arrivi / minuto)
μ= 1/ 20 = 0.05 (servizi / minuto)
$\rho = \lambda/\mu$ = 0.416667
a) P(x=0) = 1-ρ = 0.583333333
b) N medio = $\rho/(1-\rho)$= 0.714285714
c) P(x>2)=1 - P(x=0) - P(x=1) - P(x=2) = 1 -0.583333333 - 0.243056 - 0.101273 = 0.072338

3

Si ha un campione composto da 36 misure di velocità istantanee di autoveicoli. I valori misurati sono i seguenti:

velocità (km/h)	40	45	50	55	60	65
numero di veicoli	0	2	15	16	1	2

Calcolare:
A) La velocità media

B) Lo scarto quadratico medio del campione $S_x^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

C) Assumendo che la distribuzione delle velocità sia normale si stimi la media delle velocità impiegando un intervallo di confidenza al 95%.

A) V media = $\Sigma X / n$ = (40*0 + 45*2 + 50*15 + 55*16 + 60*1 + 65*2)/36 = 53.05556

B) $S_x^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \Big($ $(40-53.055)^2 * 0 + (45-53.055)^2 * 2 + (50-53.055)^2 * 15 +$

$(55-53.055)^2 * 16 + (60-53.055)^2 * 1 + (65-53.055)^2 * 2)\Big)/35 =$ 18.96825

$S = \sqrt{S^2} =$ 4.355256

C) Assumendo che la distribuzione delle velocità sia normale si stimi la media delle velocità impiegando un intervallo di confidenza al 95%.

$t_{n-1} = \left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right) \approx LEGGE \quad t$ di STUDENT

Con N > 30 si può utilizzare anche la gaussiana normale standard.
L'intervallo si trova con :
1-α = 0.95

$$P\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

4
Si abbia un processo markoviano a 3 stati regolato dalla seguente matrice di transizione:

	A	B	C
A	0	0.6	0.4
B	0.9	0	0.1
C	0.5	0.5	0

A) Determinare, se il processo va avanti all'infinito, quali saranno le probabilità che il sistema si trovi in ognuno dei tre stati.

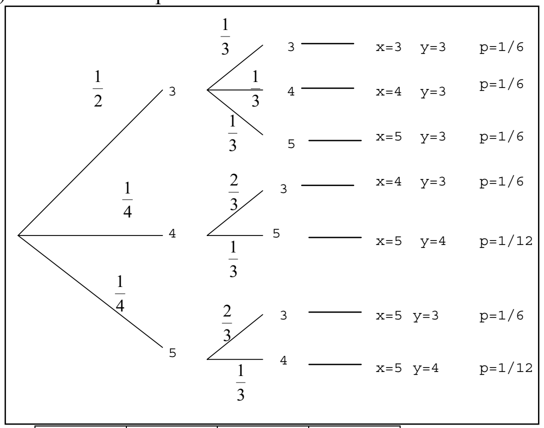
Si pone x=1 per trovare un vettore **V** punto fisso della matrice A di transizione.
Si ha :
VA = V
Quindi con x= 1:
0.9 * y + 0.5 z = 1
0.6 + 0.5 z = y
0.4 + 0.1 y = z
per esempio dalla seconda equazione si ricava z:
z = (y - 0.6)*2
sostituendo nella 3 si ottiene y=0.8421
e quindi z=0.4842
il vettore **V**=(1 , 0.8421 , 0.4842) non è un vettore di probabilità quindi si normalizza:
x+y+z=2.326316
P=(1/2.326316 , 0.8421/2.326316 , 0.4842/2.326316) =(0.429864 , 0.361991 , 0.208145)
Le componenti di P sono le probabilità cercate per i tre stati A , B e C.

1
Una scatola contiene tre monete di cui una equilibrata e due truccate in modo che, una volta lanciate diano testa con probabilità 5/7. Le monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle tre monete. La si lancia tre volte ed il risultato è T-T-T (tre volte testa).
A) Qual è la probabilità che al quarto lancio la moneta dia testa?
P(B)=P(T -T -T) = 1/3 * (1/2) ^{3} + 2/3 * (5/7) ^{3} = 0.284621
P(A)=P(A∩B)=P(T -T -T -T) = 1/3 * (1/2) ^{4} + 2/3 * (5/7) ^{4} = 0.194372

$P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} =$ 0.194372 / 0.284621 = 0.682916

(N.B: Il risultato è maggiore di 0.5 !)

2
Un' urna contiene quattro biglie due sono segnate con il numero 3, 1 con il numero 4 e una con il numero 5. Si estraggono due biglie (senza reimmissione). Si indichi con X il numero più grande estratto e con Y il numero più piccolo.
A) Trovare la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y
B) Trovare le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y.
C) Trovare la covarianza di X e Y.
D) X e Y sono indipendenti?



X\Y	3	4	P(x)
3	1/6	0	1/6
4	1/3	0	1/3
5	1/3	1/6	1/2
P(y)	5/6	1/6	

Cov = $\sum x_i\, y_i\, p(x_i, y_i) - \mu_x\ \mu_x = \dfrac{83}{6} - \left(\dfrac{19}{6} * \dfrac{26}{6}\right) = 1/9$

x e y sono dipendenti !