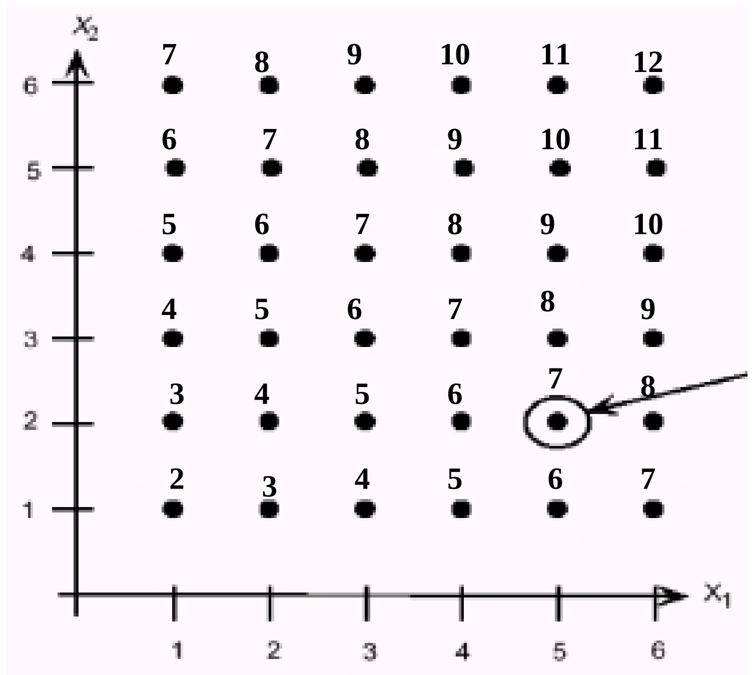
Calcolo delle probabilità

-Distribuzione binomiale.
-Momenti di una variabile aleatoria discreta
-Varianza e scarto quadratico medio di una variabile aleatoria discreta.
-Proprietà del valore atteso e della varianza
-Varianza della distribuzione binomiale
-Variabili aleatorie continue
-Esempi.



7. Prove ripetute

Se è nota la probabilità che si verifichi un evento in una prova, la probabilità che lo stesso evento si presenti una volta, due volte, eccetera, in n prove è data dai termini successivi dello sviluppo binomiale.

Infatti, indichiamo con p la probabilità che si verifichi l'evento e con q la probabilità dell'evento contrario (cioè che l'evento atteso non si verifichi). Se selezioniamo un particolare insieme di r prove sul numero complessivo delle n prove, la probabilità che l'evento si verifichi in tutte queste r prove e non si presenti nelle altre $(n-r)$ è:

$$p^r \cdot q^{n-r}$$

Ma un insieme di r prove può essere selezionato tra le n in $C(n,r)$ modi diversi, tutti ugualmente possibili. Quindi la probabilità che l'evento si presenti in r prove è uguale a:

$$C(n,r) \cdot p^r \cdot q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

La probabilità che l'evento si verifichi almeno r volte è uguale alla somma dei primi $(n-r+1)$ termini.

Esempio II.7

Se lanciamo un dado 6 volte, la probabilità di avere 1 per 4 volte è pari a:

$$p = \frac{6!}{4!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 15.\frac{25}{6^6} = \frac{375}{46656}$$

Ma la probabilità di avere 1 almeno 4 volte è uguale alla somma dei primi tre termini:

$$C(6,4).p^4.q^2 + C(6,5).p^5.q + C(6,6).p^6 =$$

$$= 15.\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 6.\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^6 =$$

$$= \frac{15.25 + 6.5 + 1}{6^6} = \frac{375 + 30 + 1}{46656} = \frac{406}{46656}$$

I coefficienti dello sviluppo del binomio possono essere ottenuti con facilità dal "triangolo di Pascal", che si presenta come segue:

Triangolo di Pascal

Valori di n	**Coefficienti in (a+b)n**
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**
5	**1 5 10 10 5 1**
6	**1 6 15 20 15 6 1**
7	**1 7 21 35 35 21 7 1**
8	**1 8 28 56 70 56 28 8 1**

Momenti di una variabile aleatoria discreta

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

M1 = E[x]
M2 = E[x²]

$$M1 = E[x]$$
$$M2 = E[x^2]$$
$$M3 = E[x^3]$$
$$M4 = E[x^4]$$
$$M4 = E[x^4]$$
$$.$$
$$Mn = E[x^n]$$

Varianza di una variabile aleatoria discreta

$$\sigma_X^2 = V(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = \sum_x [X - E(X)]^2 p_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

<u>*Verification*</u>

$$\sigma_X^2 = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = E\left\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\right\}$$
$$= E(X^2) - E(2XE(X)) + E\left\{[E(X)]^2\right\}$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2$$
$$= E(X^2) - [E(x)]^2$$

La deviazione standard non è altro che la radice quadrata del momento secondo rispetto alla media ossia della varianza.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Proprietà del valore atteso e della varianza

$$E(X+a) = E(X) + a$$

$$\sigma^2_{X+a} = \sigma^2_X$$

<u>*Verification*</u>

$$E(X+a) = \sum_x (x+a)p_x(x) = \sum_x xp_x(x) + \sum_x ap_X(x)$$
$$= E(X) + a\sum_x p_X(x) = E(x) + a$$

$$\sigma^2_{X+a} = E\left\{[(X+a) - E(X+a)]^2\right\} = E\left\{[X + a - E(X) - a]^2\right\}$$
$$= E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = \sigma^2_X$$

$$E(aX) = aE(X)$$
$$\sigma^2_{aX} = a^2\sigma^2_X$$

<u>*Verification*</u>

$$E(aX) = \sum_x axp_X(x) = a\sum_x xp_X(x) = aE(x)$$

$$\sigma^2_{aX} = E\left\{[aX - E(aX)]^2\right\} = E\left\{[aX - aE(X)]^2\right\} = E\left\{a^2[X - E(x)]^2\right\}$$
$$= a^2 E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = a^2\sigma^2_X$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\sigma^2_X = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = E\left\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\right\}$$
$$= E(X^2) - E(2XE(X)) + E\left\{[E(X)]^2\right\}$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2$$
$$= E(X^2) - [E(x)]^2$$

Varianza della distribuzione binomiale

Per la determinazione del momento secondo rispetto all'origine valgono le seguenti relazioni:

$$M_2 = \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 . P(x_i) = \sum_{x=0}^{x=n} x^2 . \frac{n!}{x!(n-x)!} . p^x . q^{n-x} =$$

$$= np + n^2 p^2 - np^2$$

Ma, poiché la varianza o momento secondo rispetto alla media, se espressa in funzione dei momenti rispetto all'origine, è data dalla relazione:

$$\sigma^2 = M_2 - M_1^2 =$$

$$= np + n^2 p^2 - np^2 - n^2 p^2 =$$

$$= np - np^2 = np(1-p) = npq$$

come risultato si ottiene per la deviazione standard la relazione:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}.$$

Nella distribuzione binomiale la varianza è inferiore alla media; infatti essa è uguale alla media n.p moltiplicata per un numero che è inferiore all'unità [q=(1-p)].

V.A. CONTINUE

Per le v.a continue: Prob[x = x] = o

"Non è possibile estendere la nozione di funzione di probabilità introdotta nel caso delle variabili discrete"

Si definisce preliminarmente la nozione di Funzione di Distribuzione di Probabilità, analogamente al caso di v.a. discrete:

$$F_X\left(\bar{x}\right) = \text{Prob}\left[X \leq \bar{x}\right]$$

(la Funzione di Distribuzione di Probabilità è sempre monotona crescente)

Si definisce indirettamente la Funzione di Densità di-Probabilità come:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Si noti che $f_X(x) \geq 0 \quad \forall\, x$

Ovvíamente, da un punto di vìsta operatívo, se è nota la $f_x(x)$ rìsulta:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx \quad \text{Per def. di prob.} \Rightarrow F_X(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

Si dimostra che:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$