DISPOSIZIONI

Definizione

Dati *n* oggetti distinti ed un numero intero *k<n*, si dicono *disposizioni semplici* degli *n* oggetti a *k* (o di classe *k*) i gruppi che si possono formare con *k* oggetti distinti scelti fra gli *n* dati, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri o per l'*ordine* o per la *qualità degli oggetti*.

Il loro numero è dato dalla relazione:

$$D(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

Origine della formula

Disposizioni di n oggetti a (k-1) a (k-1) = D(n,k-1)

In ognuna si aggiunga nello stesso posto uno dei rimanenti [n-(k-1)]=(n-k+1) oggetti. Così avremo le Disposizioni di n oggetti a k a k, cioè:

$$D(n,k) = (n-k+1).D(n,k-1).$$

Variando k tra 1 ed n, avremo:

$$D(n, 1) = n$$
$$D(n, 2) = (n-1).D(n, 1)$$
$$D(n, 3) = (n-2).D(n, 2)$$
$$......................................$$

$$D(n, k-1) = (n-k+2).D(n, k-2)$$
$$D(n, k) = (n-k+1).D(n, k-1)$$

Moltiplicando tra loro i termini si avrà:

$$D(n,1).D(n,2)....D(n,k-1).D(n,k)=$$
$$=n.(n-1).(n-2).....(n-k+1).$$
$$.D(n,1).D(n,2)......D(n,k-1)$$

e, semplificando, sarà:

$$D(n, k) = n.(n-1).(n-2).....(n-k+1)$$

Moltiplicando e dividendo il secondo termine per (n-k)! si ha, infine,

$$D(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}=P(n;n-k)$$

Il numero delle disposizioni di n elementi a k a k è uguale al numero delle permutazioni di n elementi dei quali (n-k) uguali fra loro.

DISPOSIZIONI

<u>Esempio:</u> Se n=3 e k=2, le *disposizioni* possibili di tre oggetti *a*, *b*, *c*, presi due alla volta sono D(3,2)=6, ossia:

ab, ac, ba, bc, ca, cb

Invece, con n=4 oggetti *a*, *b*, *c*, *d* si possono formare le 12 seguenti *disposizioni* di k=2 oggetti ciascuna:

ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc

che differiscono tra loro o per *almeno un oggetto* o per la *posizione* degli oggetti.

COMBINAZIONI di oggetti tutti distinti

<u>Definizione</u>

Dati *n* oggetti distinti e un numero intero *k*<*n*, si dicono *combinazioni semplici* degli *n* oggetti a *k* a *k* (o di classe *k*) i gruppi che si possono formare con *k* oggetti distinti scelti fra gli *n* dati, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri solo per la *qualità* degli oggetti e non per il loro ordine.

Il loro numero è dato dalla relazione:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

COMBINAZIONIdi oggetti tutti distinti

<u>Origine della formula</u> **Si è definito:**

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)........(n-k+1)}{1.2.3.......k} =$$

$$= \frac{D(n,k)}{P(k)}$$

Il numero di combinazioni di n oggetti a k a k è pari al rapporto tra il numero delle disposizioni di n oggetti a k a k e quello delle permutazioni di k oggetti.

COMBINAZIONI di oggetti tutti distinti

<u>Esempio</u>

Oggetti: *a, b, c*

Combinazioni a due a due:

ab, ac, bc

Disposizioni:

1. ***ab, ac, bc***
2. ***ba, ca, cb***

C(3,2) = 3, D(3,2) = 6;
C(3,2)=1/2.D(3,2)

Oggetti: *a, b, c, d*

Combinazioni a tre a tre:

abc, abd, acd, bcd

Disposizioni:

1. *abc, abd, acd, bcd,*
2. *acb, adb, adc, bdc,*
3. *bac, bad, cad, cbd,*
4. *bca, bda, cda, cdb,*
5. *cab, dab, dac, dbc,*
6. *cba, dba, dca, dcb.*

C(4,3) = 4   D(4,3) = 24;
C(4,3)=1/6.D(4,3)

Applicando la formula generale, dunque, il numero delle *combinazioni* possibili ad esempio con 7 oggetti presi 4 alla volta è pari a:

$$C(7,4) = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 35$$

COMBINAZIONI   di oggetti non tutti distinti

<u>Definizione</u>

Se si ammette che ogni elemento possa entrare in ciascun gruppo anche più di una volta, il numero delle *combinazioni con ripetizione* di *n* elementi a *k* a *k* è pari a:

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-1)!} =$$
$$= \frac{(n+k-1).(n+k-1).......(n-1).n}{1.2.3.........k}$$

COMBINAZIONI   di oggetti non tutti distinti

<u>Esempio</u>

Le combinazioni di 3 oggetti a 2 a 2 sono in tutto 3!2!1!=3. Se i tre oggetti sono *a*, *b*, *c* le *combinazioni a 2 a 2* possibili sono:

ab, ac, bc.

Ma, se si ammette che ogni elemento possa entrare in una combinazione anche più di una volta, le *combinazioni con ripetizione* diventano le seguenti:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

REGOLE PRINCIPALI

DEFINIZIONE 1:

Se n è un numero intero positivo, il prodotto 1.2.3...... ...(n-1).n è definito dal simbolo n! e si legge "n fattoriale".

DEFINIZIONE 2:

Se n=0 si ammette, per convenzione che il fattoriale di o sia pari all'unità e si scrive 0! = 1.

DEFINIZIONE 4:

Il numero dei modi in cui si possono selezionare ed ordinare k oggetti scelti tra n oggetti distinti costituisce il numero delle disposizioni di n oggetti di classe k (o a k a k) ed è indicato con il simbolo D(n,k).

Teorema 2:

$$D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

DEFINIZIONE 5: Il numero complessivo delle possibili selezioni di k oggetti scelti tra n oggetti distinti costituisce il numero delle combinazioni di n oggetti presi k alla volta e viene indicato con il simbolo C(n,k).

Teorema 3:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Teorema 4:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} == \frac{n!}{(n-k)!k!} = C(n,n-k)$$

Teorema 5: $C(n,n) = C(n,0) = 1$