Calcolo delle probabilità

-Definizione di variabile aleatoria.
-Definizione di funzione di frequenza (densità) di probabilità per variabili aleatorie discrete.
-Definizione di funzione di distribuzione per variabili aleatorie discrete.
-Valore atteso (media) di una variabile aleatoria discreta.
-Valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria discreta.
-Distribuzione binomiale.
-Esempi.

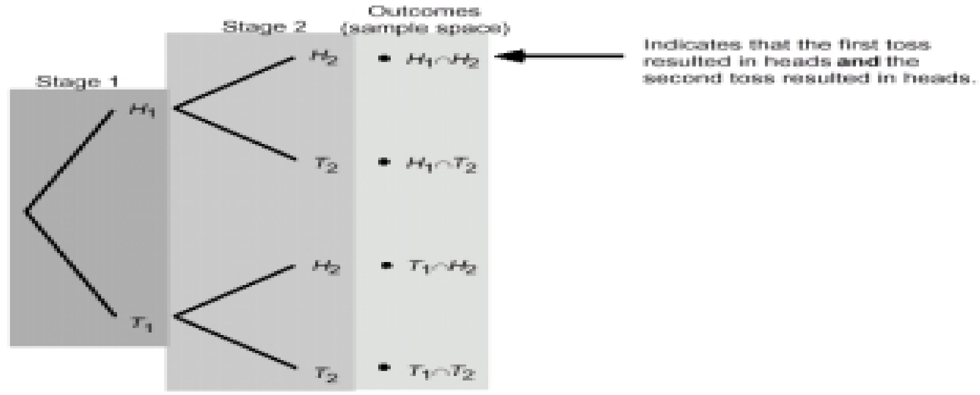


FIGURE 1.1 A tree diagram of the sample space for flipping a coin twice.

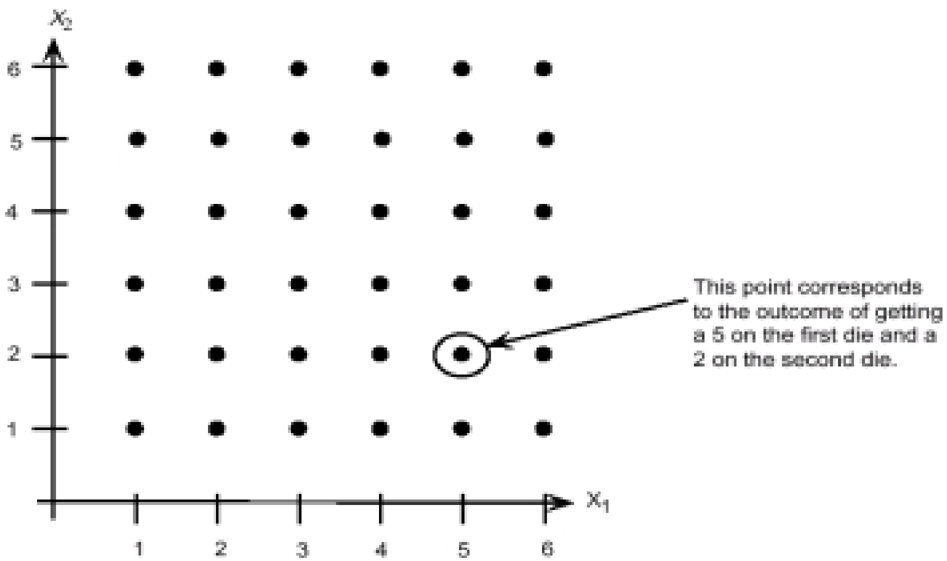


FIGURE 1.2 Coordinate system representation of a sample space for tossing two die.

Variabili aleatorie (V.a.)

V.a. X e' una funzione reale degli eventi di uno spazio delle prove (S) probabilizzato

$$E \xrightarrow{X} X(E \subseteq S) = x \in D \subseteq R$$

S Insieme di definizione di X

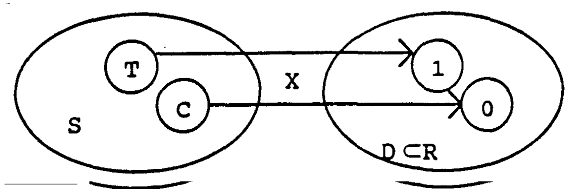
x=X(E) Realizzazione della variabile aleatoria X

Se D è un insieme continuo v.a. continua
(misura velocità, altezza)
Se D è un insieme discreto v.a. discreta
(Lancio dado, moneta)

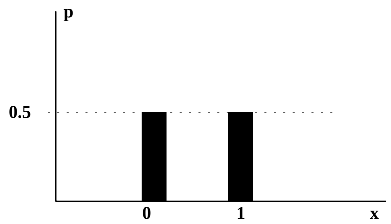
La probabilità di una realizzazione d'una variabile aleatoria è la probabilità che si verifichi l'evento ad essa associato

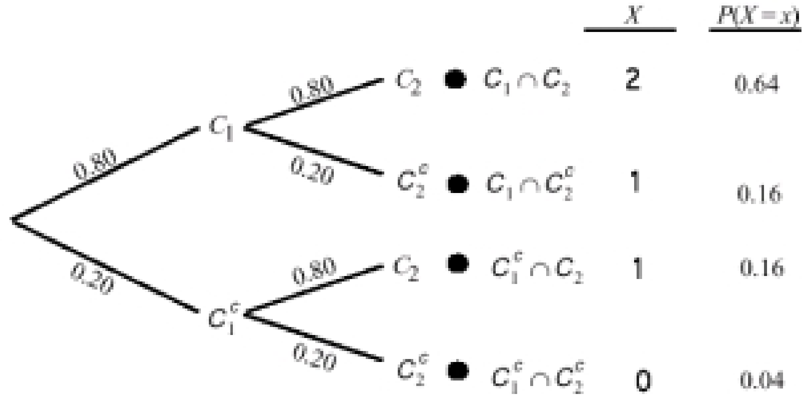
La probabilità di una realizzazione d'una variabile aleatoria (discreta) è la probabilità che si verifichi l'evento ad essa associato

$$P\left[X(E)=x\right]=P(E)$$

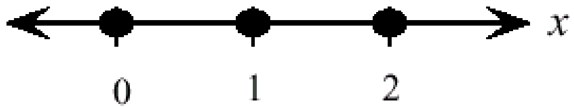


X(T)=1, P(T)=0.5
X(C)=O, P(C)=0.5
P(1)=0.5.
P(O)=0.5



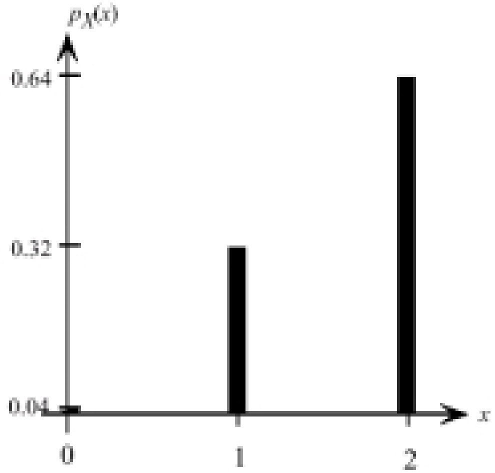


$$P(X=0)=P(C_1^c\cap C_2^c)=(0.2)(0.2)=0.04$$



$$p_X(x)=\begin{cases}0.04 & \text{for } x=0\\ 0.32 & \text{for } x=1\\ 0.64 & \text{for } x=2\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

x	$p_X(x)$
0	0.04
1	0.32
2	0.64



$$\begin{aligned}P(X\geq 1)&=P(X=1\text{ or }X=2)\\&=P(X=1)+P(X=2)\\&=0.32+0.64=\mathbf{0.96}\end{aligned}$$

1. $0\leq p_X(x)\leq 1$ for all x (from the axioms of probability)
2. $\sum_x p_X(x)=1$ (because each point in the sample space is assigned one and only one experimental value by the random variable).

ESEMPIO DI FUNZIONE DI FREQUENZA <u>ERRATA</u>

$$q(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}(x-2)^3 & x=0,1,2,3,4,5\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

$$\sum_x q(x)=\frac{1}{9}(0-2)^3+\frac{1}{9}(1-2)^3+\frac{1}{9}(2-2)^3+\frac{1}{9}(3-2)^3+\frac{1}{9}(4-2)^3+\frac{1}{9}(5-2)^3$$

$$=-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}+0+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{9}{9}=1$$

QUALE DELLE DUE FUNZIONI E' UNA FUNZIONE DI FREQUENZA ?

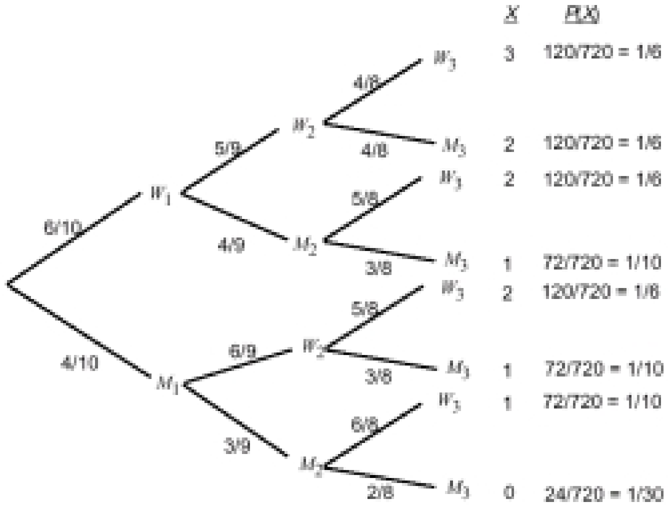
1

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x-2)^2 & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

2

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{19}(x-2)^2 & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

In un gruppo composto da 4 studentesse e 6 studenti. Tre sono scelti a caso per una prova alla lavagna. Quale sono le probabilità di avere 0,1,2 o 3 studenti.



$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 3 \\ \frac{1}{2} & x = 2 \\ \frac{3}{10} & x = 1 \\ \frac{1}{30} & x = 0 \end{cases}$$

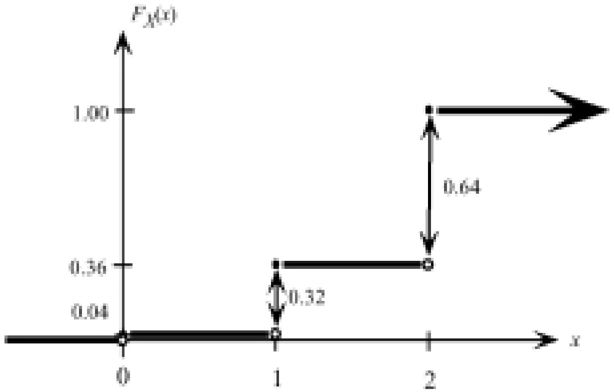
Funzione Distribuzione di Probabilità dì V.a discrete

$$F_X(x) = P(X \le x).$$

$$F_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{x} p_X(y)$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.04 & \text{for } x = 0 \\ 0.32 & \text{for } x = 1 \\ 0.64 & \text{for } x = 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.04 & 0 \le x < 1 \\ 0.36 & 1 \le x < 2 \\ 1.00 & x \ge 2 \end{cases}$$



Event	Formula for Probability of the Event
$\{X = a\}$	Height of jump of graph of $F_X(x)$ at $x = a$
$\{a < X\}$	$1 - F_X(a)$
$\{a \le X\}$	$1 - F_X(a) + P(X = a)$
$\{X \le b\}$	$F_X(b)$
$\{X < b\}$	$F_X(b) - P(X = b)$
$\{a < X \le b\}$	$F_X(b) - F_X(a)$
$\{a < X < b\}$	$F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$
$\{a \le X \le b\}$	$F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$
$\{a \le X < b\}$	$F_X(b) - F_X(a) + P(X = a) - P(X = b)$

Property 1: A CDF $F_X(x)$ is always nondecreasing in x. That is, $F_X(a) \le F_X(b)$ whenever $a \le b$.

Property 2: The values of $F_X(x)$ always lie between 0 and 1; that is, $0 \le F_X(x) \le 1$ for all x.

Property 3: $F_X(x)$ approaches 0 as x becomes arbitrarily small, and $F_X(x)$ approaches 1 when X becomes arbitrarily large. More formally,

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$

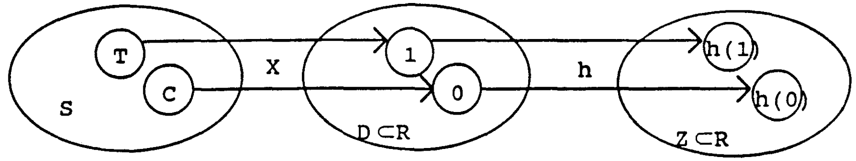
Property 4. For any number a, as x takes values decreasing to a, the value of $F_X(x)$ will approach $F_X(a)$. That is,

$$\lim_{x \downarrow a} F_X(x) = F_X(a)$$

Valore atteso (media) di una variabile aleatoria discreta:

$$E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

Data una variabile aleatoria X, è sempre possibile definire una funzione della variabile aleatoria X g(X), la funzione risulta essere a sua volta una funzione aleatoria.



SI DIMOSTRA:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$$

ESEMPIO
Gioco della roulette. Scommettiamo 1 Dollaro a Las Vegas su *dispari*.

Qual è la speranza matematica di vincita.?

$$p_X(1) = P(X=1) = P(\{1,3,5,\ldots,35\}) = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$$

$$p_X(-1) = P(X=-1) = 1 - \frac{9}{19} = \frac{10}{19}$$

Risposta

Vincita attesa= 1 (9/19) + (-1) (10/19) = -0.053 $ (circa -100 lire)

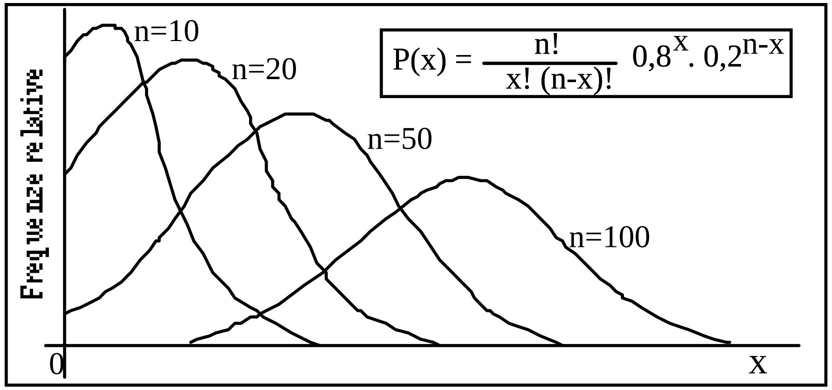
Distribuzione binomiale (distribuzione di Bernoulli)

Se p denota la probabilità che si presenti un evento favorevole in una singola prova e q = 1 - p la probabilità dell'evento contrario.
La probabilità che l'evento favorevole si presenti esattamente x volte in una serie di n prove indipendenti è data dalla espressione seguente:

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}.p^x.q^{n-x}.$$

La distribuzione binomiale o bernoulliana fornisce le risposte al problema delle prove ripetute, stima le probabilità che un evento, con probabilità a priori o frequentista p, si presenti rispettivamente 0, 1, 2,...,i,..., n volte, nel corso di n prove identiche ed indipendenti.

L'equazione della funzione binomiale mostra che la forma della curva binomiale dipende dai valori n, p e q. Per valori di n molto grandi, anche quando p e q sono molto diversi tra loro, la curva binomiale assume una forma approssimativamente simmetrica, ma quando n è piccolo e p e q sono molto diversi tra loro, la curva appare asimmetrica, con asimmetria tanto maggiore quanto più diversi sono i valori di p e di q e quanto più piccolo è il numero delle osservazioni n.



Media aritmetica della distribuzione binomiale

$$M = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n} x_i . f_i = \sum_{i=0}^{n} x_i . P(x_i)$$

e poiché

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} . p^x . q^{n-x}$$

si avrà che la media aritmetica è uguale a:

$$M = \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} . p^x . q^{n-x} . x = np. \sum_{x=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} . p^{x-1} . q^{n-x} =$$

$$= np.(p+q)^{n-1} = n.p$$

(p+q)=1

La media aritmetica della distribuzione binomiale è quindi data dalla relazione M = n.p .