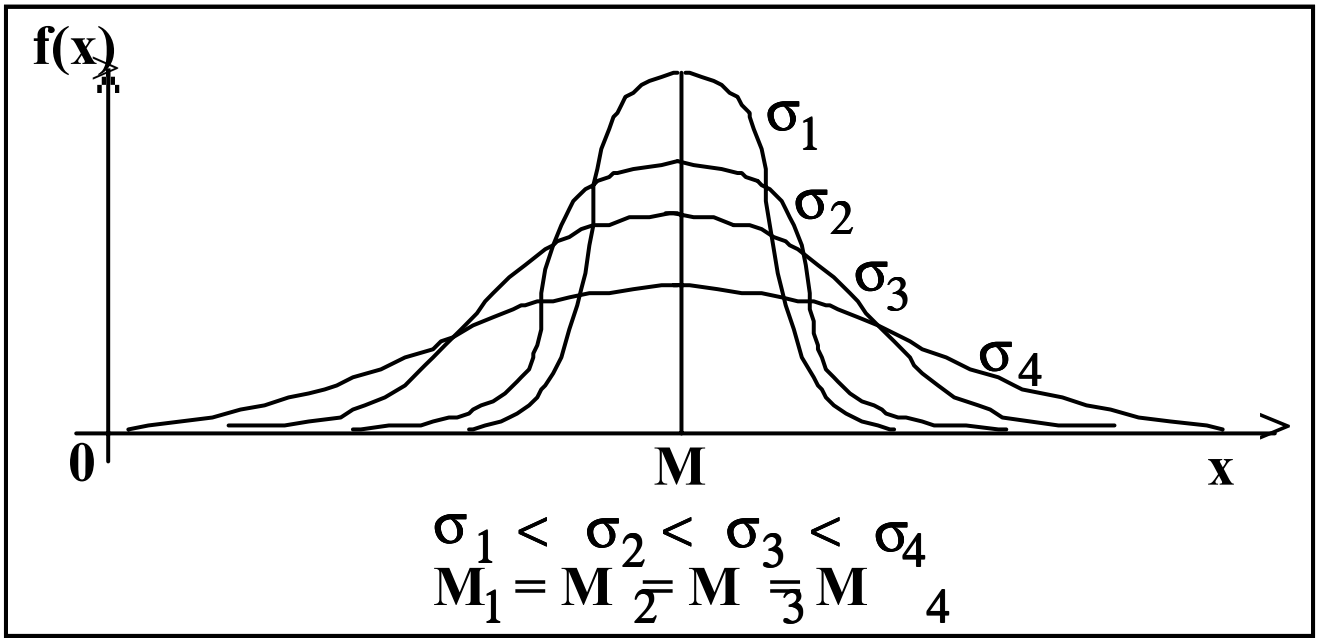
A parità di valore medio, la forma campanulare è tanto più appiattita quanto più grande è la variabilità



Date n variabili indipendenti $x_1, x_2, ...,x_n$, se la loro distribuzione è di tipo normale, con media $m_1, m_2, ..., m_n$ e varianza $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2},...., \sigma_{x_n}$ allora la variabile $X = x_1+x_2+....+x_n$, somma di queste variabili è anch'essa distribuita normalmente, con media $M= m_1+m_2+....+m_n$ e varianza $\Sigma = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} +.... + \sigma_{x_n}$, uguali alla somma delle medie ed alla somma delle varianze delle variabili originarie.

Momenti della distribuzione normale

La *media* e la *deviazione standard* della distribuzione normale sono uguali ad M ed a σ che compaiono nell'equazione normale.
Il *momento di ordine k rispetto alla media* è definito da:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - M)^k . f(x)}{N} . dx =$$

Data la simmetria della distribuzione tutti i momenti di ordine dispari rispetto alla media sono nulli

Per i momenti di ordine *pari* vale la relazione:

$$\mu_k = (k-1).\sigma^2.\mu_{k-2}.$$

per cui si avrà: $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \sigma^2$, $\mu_4 = 3.\sigma^4$, $\mu_6 = 15.\sigma^6$ **e così via.**

Il parametro σ ***della legge normale è dunque lo scarto tipo o deviazione standard di*** x

La variabile t, trasformata della x che ha *origine* degli assi *nel punto medio* e *unità di misura* pari al*la deviazione standard* della variabile originaria, è detta anche *variabile normalizzata o scarto ridotto* e la sua legge di distribuzione viene detta *forma ridotta della legge normale*.

Non dipende da alcun parametro, ha *media uguale a zero* e *deviazione standard uguale all'unità*. I momenti dei successivi ordini fino al quarto hanno i valori $\alpha_3 = 0$ **ed** $\alpha_4 = 3$ **e lo stesso dicasi per** β_1 **e** β_2**.**

Questo risultato è molto importante, in quanto è a questi valori che vengono paragonati quelli corrispondenti calcolati per le altre distribuzioni di tipo campanulare, al fine di valutarne il grado di asimmetria e di appiattimento.

Adattamento della distribuzione normale a dati empirici

La densità di frequenza della distribuzione normale in x è :

$$f(x) = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

che in termini di logaritmi diviene:

$$\log f(x) = -\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2} + \log \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

e ponendo $Y = \log f(x)$ ed $X = (x - M)^2$, esprimerà la retta:

$$Y = -\frac{1}{2\sigma^2} . X + \log \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

che può essere adattata ai dati effettivi con uno dei metodi di interpolazione disponibili.

Esempio IV.4 **Si consideri la seguente tabella delle frequenze dell'altezza in centimetri di 78 piante di una determinata specie. Ci si propone di:**

a) verificare se la curva normale può essere scelta come una buona curva interpolatrice per tale distribuzione di frequenze;

b) calcolare le frequenze teoriche della curva normale che ha la stessa media e la stessa varianza della seriazione data.

Altezza (cm)	Frequenza
10 ¬ 15	4
15 ¬ 20	20
20 ¬ 25	28
25 ¬ 30	12
30 ¬ 35	8
35 ¬ 40	6
	78

Calcoliamo anzitutto i momenti della distribuzione data.

Classi di altezza (cm)	Media di classe (v_i)	f_i	$x_i=(v_i-22,5)$	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	$x^3_i f_i$	$x_i^4 f_i$
10 ¬ 15	12,5	4	-2	-8	16	-32	64
15 ¬ 20	17,5	20	-1	-20	20	-20	20
20 ¬ 25	22,5	28	0	0	0	0	0
25 ¬ 30	27,5	12	1	12	12	12	12
30 ¬ 35	32,5	8	2	16	32	64	128
35 ¬ 40	37,5	6	3	18	54	162	486
Totali		78	3	18	134	186	710

$M = 18/78 = 0,23$; $M_2 = 134/78 = 1,72$;
$M_3 = 186/78 = 2,38$; $M_4 = 710/78 = 9,10$;
$\mu_2 = M_2 - M^2 = 1,718 - 0,053 = 1,665$.

Con le correzione di Sheppard sul momento secondo sarà:

$$\mu'_2 = \mu_2 - 1/12 = 1,66 - 0,08 = 1,58$$
e quindi $\sigma =$ radq(1,58) $= 1,26$.

Per il momento terzo avremo:

$$\mu'_3 = M_3 - 3.M_2.M + 2.M^3 =$$
$$= 2,38 - 1,19 + 0,024 = 1,21$$

$$\alpha_3 = 1,21/(1,26)^3 = 1,21/1,99 = 0,6$$

e per il momento quarto μ_4 avremo:

$$\mu_4 = M_4 - 4.M_3.M + 6.M_2.M^2 - 3.M^4 =$$
$$= 9,10 - 2,19 + 0,55 - 0,01 = 7,44$$

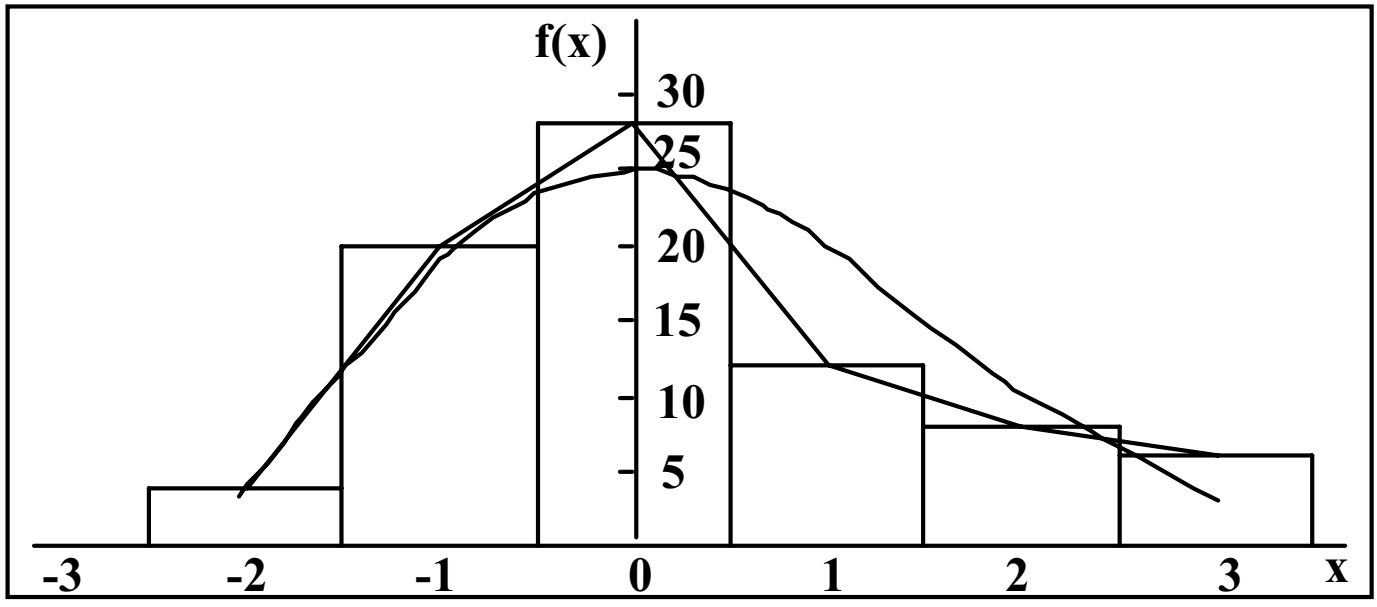
$$\mu'_4 = \mu_4 - 1/2\mu_2 + 7/240 =$$
$$= 7,44 - 0,83 + 0,03 = 6,64$$

$$\alpha_4 = 6,64/(1,26)^4 = 6,64/2,50 = 2,6.$$

Come si vede, i valori di α_3 e α_4 sono quasi prossimi a zero ed a 3; si può quindi concludere che la curva normale può essere adottata come curva interpolatrice, malgrado essa non dia un perfetto adattamento ai dati.

La curva della distribuzione data ha *asimmetria positiva* e quindi essa sarà più allungata verso destra e più inclinata verso sinistra. Inoltre, poichè $\alpha_4 = 2,6$ è minore di 3, la curva sarà *più appiattita* della curva normale.

La rappresentazione grafica della distribuzione osservata e della curva normale ad essa adattata risulta essere la seguente:



Distribuzione rettangolare o uniforme

E' *la più semplice* tra le distribuzioni continue. Nell'intervallo tra $x_1=\alpha$ e $x_2=\beta$ ha densità di frequenza relativa pari a:

$$f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha} \quad \text{con } (\alpha < x < \beta)$$

quindi ha *densità costante* in tutto l'intervallo compreso tra α e β.
La rappresentazione grafica di questa distribuzione ha la forma di un rettangolo, che giustifica il suo nome.
E' l'equivalente della distribuzione uniforme discreta considerata nel continuo e la sua *media* e *varianza* sono:

$$M=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{e} \quad \sigma^2=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

La mediana coincide con la media, mentre la moda o non esiste o ve ne sono tante quanti i valori compresi tra α e β.

Distribuzione esponenziale negativa

Distribuzione continua descritta dalla relazione

$$f(x)=\alpha . e^{-\alpha x} \quad \text{con } \alpha>0 \text{ e } x>0$$

E' una funzione *positiva o nulla continuamente decrescente*, che tende a 0 per x *tendente all'infinito*. Nel discreto ha l'equivalente nella distribuzione geometrica decrescente.

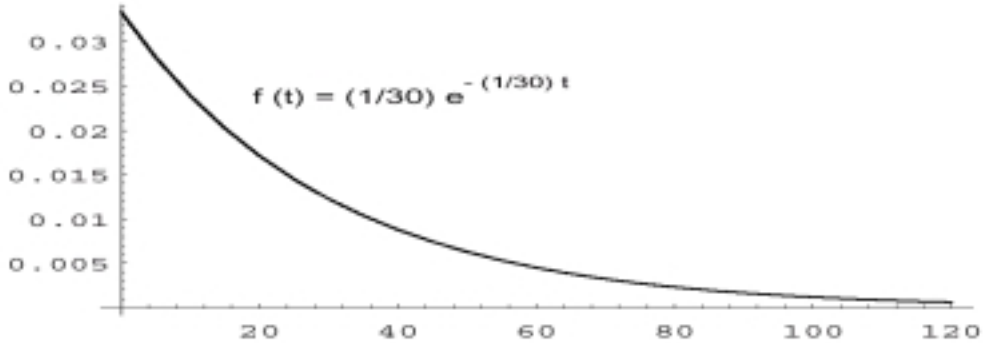


Figure 2.20: Exponential density with $\lambda = 1/30$.

La *media* e la *varianza* sono, rispettivamente:

$$\boxed{M = \frac{1}{\alpha}} \text{ e } \boxed{\sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2} = M^2}.$$

Distribuzioni congiunte e condizionate

	Not smoke	Smoke	Total
Not cancer	40	10	50
Cancer	7	3	10
Totals	47	13	60

Table 4.1: Smoking and cancer.

		S	
		0	1
C	0	40/60	10/60
	1	7/60	3/60

Table 4.2: Joint distribution.

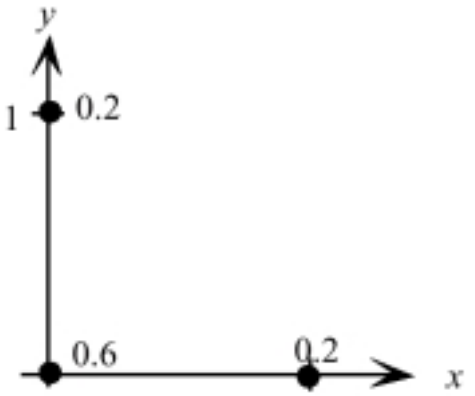
$$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1,$$

$$\sum_y p_{X,Y}(x,y) = p_X(x),$$

$$\sum_x p_{X,Y}(x,y) = p_Y(y).$$

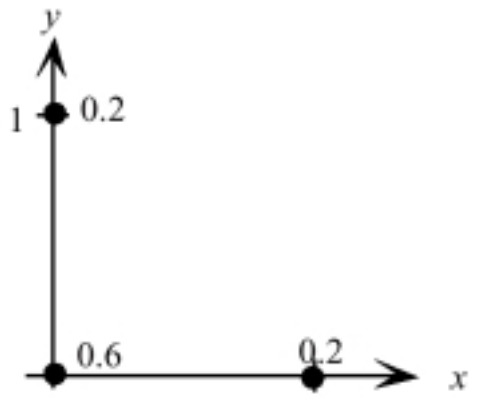
ESEMPIO: In una scatola ci sono 5 lampadine di cui 4 buone ed una difettosa. Se ne estraggono 2. Sia x il numero di difetti della prima lampada ed y il numero di difetti della seconda lampada. Trovare la funzione di densità congiunta.

$p_{X,Y}(x,y)$



$$p_X(0) = \sum_y p_{X,Y}(0,y) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1)$$
$$= 0.6 + 0.2 = 0.8$$

$$p_X(1) = \sum_y p_{X,Y}(1,y) = p_{X,Y}(1,0) \quad = 0.2$$



$$p_X(x) = \begin{cases} 0.8 & \text{for } x = 0 \\ 0.2 & \text{for } x = 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.8 & \text{for } y = 0 \\ 0.2 & \text{for } y = 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Distribuzioni condizionate

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \qquad p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$$

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y \mid x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x \mid y)$$

Variabili indipendenti

$$p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$$

X\Y	NON FUMO 0	FUMO 1	
NON Cancro 0	40/60	10/60	50/60
Cancro 1	7/60	3/60	10/60
	47/60	13/60	

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$P_{Y|X}(1|1) = \frac{3/60}{13/60} = \frac{3}{13}$$

Distribuzioni continue congiunte e condizionate

$$f(x|E) = \begin{cases} f(x)/P(E), & \text{if } x \in E, \\ 0, & \text{if } x \notin E. \end{cases}$$

$$P(F|E) = \int_F f(x|E)\,dx$$

$$P(F|E) = \int_F f(x|E)\,dx = \int_{E\cap F} \frac{f(x)}{P(E)}\,dx = \frac{P(E\cap F)}{P(E)}$$

$$
\begin{aligned}
G(t) &= \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\
&= -e^{-\lambda x}\Big|_t^\infty = e^{-\lambda t} \\
P(F|E) &= \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \\
&= \frac{G(r+s)}{G(r)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(r+s)}}{e^{-\lambda r}} \\
&= e^{-\lambda s}\ .
\end{aligned}
$$

Le curve di Karl Pearson

Il sistema di curve di frequenza di Karl Pearson riesce a descrivere con elevata approssimazione molte distribuzioni empiriche; si adatta molto bene a rappresentare la distribuzione dei valori in molti fenomeni reali, ma ha il grave limite che *i parametri che la definiscono non sono esplicativi*, spesso non forniscono alcun significato per l'interpretazione del fenomeno studiato e di conseguenza non si prestano ad usi predittivi.

La forma esplicita della funzione è espressa dall'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+c)}{b_0 + b_1 . x + b_2 . x^2}$$

che dipende dalle radici dell'espressione quadratica del denominatore, cioè dai valori dei parametri b0, b1, b2, essendo x ed y i valori degli assi coordinati e c una costante.

Anche la distribuzione *normale* e le sue approssimazioni con *asimmetria* ed *appiattimento* variabili possono essere rappresentate come una delle possibili curve del Pearson e possono essere riguardate come una parte delle distribuzioni che è possibile descrivere con elevata precisione.

Distribuzione Gamma (III tipo del Pearson)

La distribuzione Gamma (Γ) descrive una variabile casuale *continua e positiva* distribuita con densità pari a

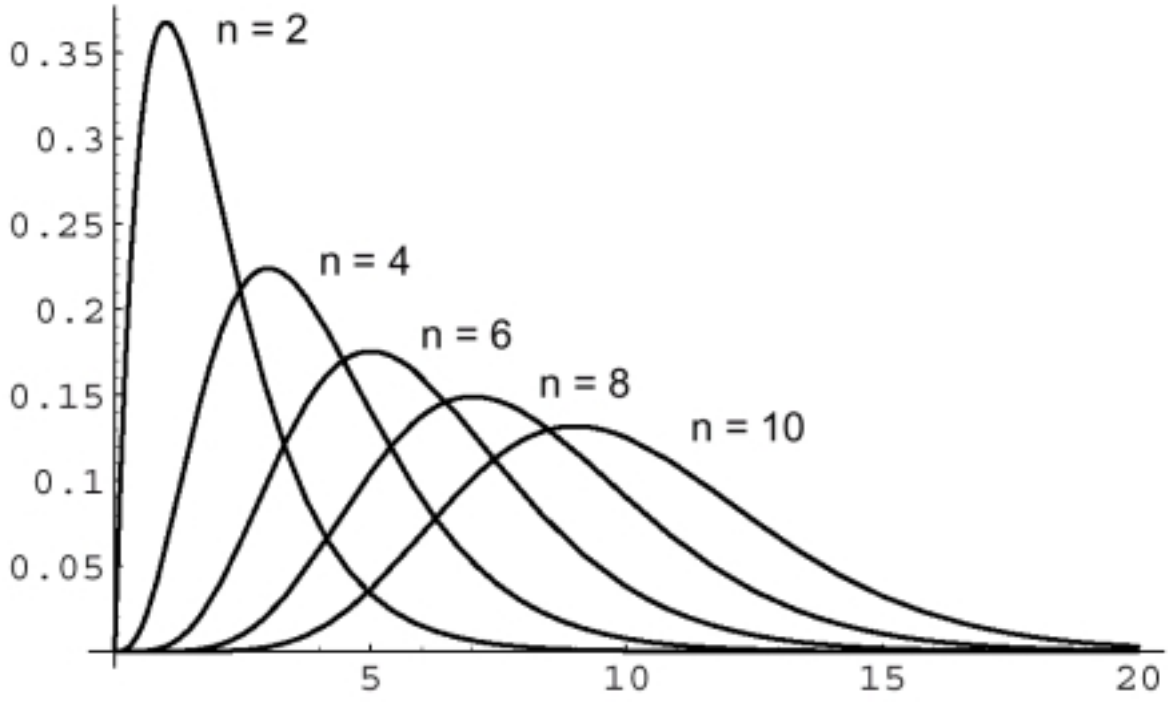
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-x} \quad (0 \le x < \infty;\ m > 0)$$

in cui la funzione gamma è definita da:

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

La funzione Gamma dipende dal parametro m e la variabile che descrive si chiama una variabile γ(m).

Tale distribuzione è *asintotica* rispetto all'asse delle x e si annulla per x=0 se n>2.



Essa fu chiamata da Legendre, agli inizi dell'800, *integrale euleriano di seconda specie*, in onore di Eulero che la studiò per primo nella seconda metà del '700, e costituisce una curva del III tipo del Pearson.

La distribuzione Gamma è di notevole importanza in Statistica poiché si dimostra che:

- ***quando una variabile statistica è distribuita normalmente, il suo quadrato è distribuito secondo una distribuzione Gamma*.**
- **Inoltre, anche *la distribuzione della varianza dei campioni è ancora una distribuzione gamma***
- **e, in generale,*la somma dei quadrati di variabili normali è distribuita secondo una distribuzione Gamma*.**

Distribuzione Beta (I tipo del Pearson)

Una variabile continua x di densità:

$$f(x) = \frac{x^{k-1}(1-x)^{m-1}}{B(k,m)} \qquad (0 \le x \le 1;\ k > 0;\ m > 0)$$

in cui

$$B(k,m) = \frac{\Gamma(k).\Gamma(m)}{\Gamma(k+m)} = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{m-1}\,dx$$

si dice distribuita secondo la funzione Beta con parametri k ed m o più brevemente chiamasi variabile β(k,m). La suddetta f(x) è una curva del *I tipo del Pearson*.

La distribuzione Beta è strettamente collegata con la distribuzione Gamma. Si dimostra che:

Se due variabili indipendenti sono distribuite rispettivamente secondo una γ(k) e una γ(m), il loro rapporto è distribuito secondo una β(k,m).

Ciò è importante per la distribuzione F, fondamentale per l'analisi della varianza, che come rapporto di variabili distribuite secondo una Gamma, è una Beta.

Distribuzione Chi-quadrato $\chi^2(n)$

Se **Z1,Z2,Z3,....,Zn** sono variabili normali standardizzate **(μ=0,σ=1)** indipendenti la variabile:

$$\chi_n^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

è denominata variabile χ^2 con **n** gradi di libertà.
una variabile χ_n^2 è anche quindi:

$$\chi_n^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

Distribuzione Chi-quadrato $\chi^2(n)$

$$f\left(\chi_n^2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \cdot \left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

$$0 < \chi^2 < \infty$$

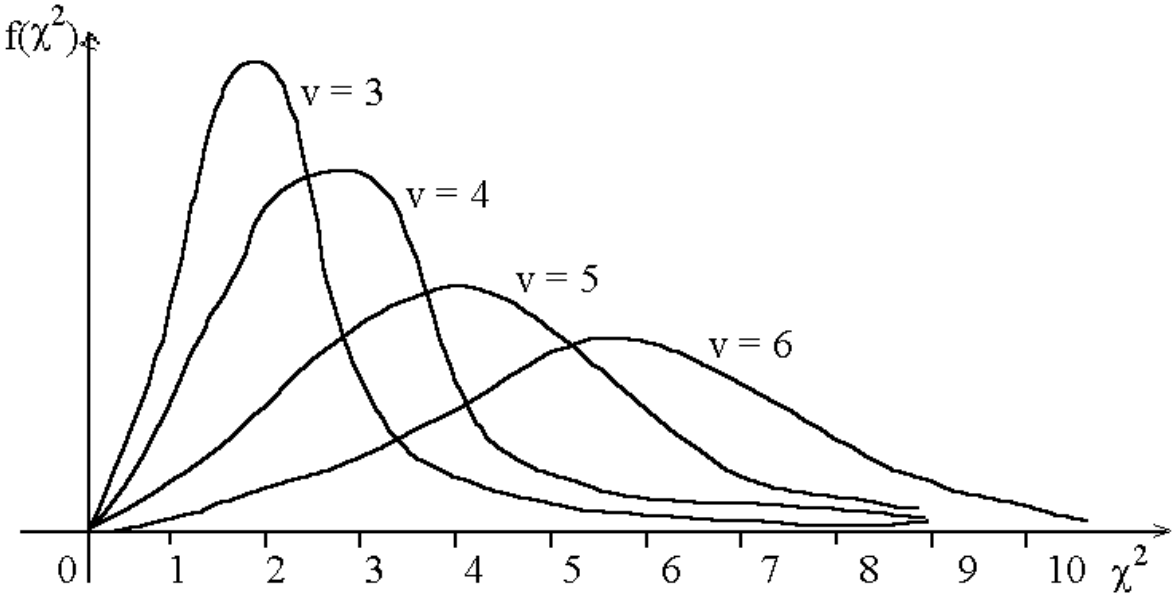
n rappresenta il numero dei *gradi di libertà*.

Essa è un caso particolare della distribuzione Gamma.

TUTTE LE SUE CARATTERISTICHE DIPENDONO SOLO DAL PARAMETRO **n** (NUMERO DEI GRADI DI LIBERTÀ)

PROPRIETÀ' DELLA VARIABILE χ^2

- VARIABILE **CONTINUA**
- ASSUME VALORE **POSITIVO** FRA 0 ED INFINITO



- LA VARIABILE SOMMA DI DUE VARIABILI χ^2 RISPETTIVAMENTE CON **N**1 E **N2** GRADI DI LIBERTA' E' A SUA VOLTA DISTRIBUITA COME UNA χ^2 CON **N1+N2** GRADI DI LIBERTA'
- LA **MEDIA** DI UNA V.A. χ^2_n è PARI AD **n**
- LA **VARIANZA** DI UNA V.A. χ^2_n è PARI A **2n**
- LA DISTRIBUZIONE PER N>100 HA UN ANDAMENTO CHE PU0' ESSERE APPROSSIMATO A QUELLO DI UNA VARIABILE NORMALE. NELLE TAVOLE NON SI TROVA QUINDI LA DISTRIBUZIONE χ^2_n PER N>100 IN QUANTO E' POSSIBILE RICAVARLA DALLE TAVOLE DELLA DISTRIBUZIONE NORMALE

♦ LA DISTRIBUZIONE χ^2_n NON E' ADATTA A RAPPRESENTARE LA DISTRIBUZIONE DI POPOLAZIONI O L'ANDAMENTO DI FENOMENI IN GENERE.

♦ E' UTILE PER L'ANALISI DI **STATISTICHE CAMPIONARIE**

CALCOLO DELLA **MEDIA** DI UNA χ^2_n

$$E[\chi^2_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \chi^2_n\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

VARIANZA DI UNA χ^2_n

$$VAR(\chi^2_n) = E\left[(\chi^2_n)^2\right] - \left[E[\chi^2_n]\right]^2 = 2n$$

SOMMA DI DUE VARIABILI χ^2_n

$$K = \chi^2_{n1} + \chi^2_{n2} = \sum_{i=1}^{n1}\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n2}\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n1+n2}\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \cong \chi^2_{n1+n2}$$

VARIANZA DEL CAMPIONE DI UNA DISTRIBUZIONE NORMALE

Per stimare la varianza σ^2 di una distribuzione normale si può usare lo stimatore :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

per analizzare la distribuzione di questo stimatore è necessario utilizzare la funzione di distribuzione del **CHI-QUADRATO** si ha:

$$\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)S^2 \approx \chi^2_{n-1}$$

RELAZIONE FRA UNA VARIABILE χ^2_n ED UNA VARIABILE NORMALE PER N GRANDE

si ha che la quantita'

$$\sqrt{2\chi^2_n} - \sqrt{2n-1} \cong Z$$

SEGUE UNA LEGGE N(0,1) QUINDI:

$$\chi^2_n \cong \frac{1}{2}\left(Z + \sqrt{2N-1}\right)^2$$

DA CUI

$$P(\chi^2_n < K) \approx P\left(\frac{1}{2}\left(Z + \sqrt{2N-1}\right)^2 < K\right) = P\left(Z < \sqrt{2K} - \sqrt{2n-1}\right)$$

E QUINDI

$$\chi^2_{n,\alpha} \cong \frac{1}{2}\left(Z_\alpha + \sqrt{2N-1}\right)^2$$

Distribuzione F di Fisher

La *distribuzione F* è una distribuzione sulla quale si basa molta parte della statistica parametrica. Essa corrisponde alla distribuzione del rapporto di due variabili casuali chi-quadrato indipendenti (A e B), divise per i loro rispettivi gradi di libertà (m ed n), cioè:

$$F(m,n) = \frac{\frac{A}{m}}{\frac{B}{n}}$$

L'ordine con il quale sono riportati i due numeri che indicano i gradi di libertà di F è importante, perché la densità della distribuzione di F non è simmetrica rispetto ad essi. Per primo si riporta sempre il numero di gradi di libertà del numeratore e per secondo quello del denominatore.

Distribuzione t di Student

La *distribuzione t di Student*, con n gradi di libertà è data dal rapporto tra una variabile casuale con distribuzione normale standardizzata (Z) e la radice quadrata di una variabile casuale con distribuzione chi-quadrato (A), indipendente dalla Z e divisa per i suoi gradi di libertà (n), cioè:

$$t_{(n)} = \frac{Z}{\sqrt{A/n}}.$$

All'aumentare dei gradi di libertà, la distribuzione t di Student si avvicina alla distribuzione normale standardizzata.

Il quadrato di una t di Student con n gradi di libertà è uguale ad una distribuzione F di Fisher con gradi di libertà 1 ed n, cioè:

$$\mathbf{t^2_{(n)} = F_{(1,n)}},$$

oppure

$$\mathbf{t_{(n)} = \sqrt{F_{(1,n)}}}.$$