Sistema di coda ad un canale con arrivi poissoniani e tempi di servizio esponenziali.

Si può dimostrare che assumere il tasso degli arrivi costante e pari a λ equivale ad assumere per gli intervalli fra due arrivi successivi una funzione di densità di probabilità di tipo esponenziale, si ha cioè :

$$f(t) = \lambda*\exp(-\lambda*t)$$

mentre la funzione di distribuzione F(t*) = P(t*<=t) sarà

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda*t)$$

Nella stessa ipotesi si ha che la probabilità Pk(t) che vi siano k arrivi in un intervallo di tempo (0,t) è :

$$Pk(t) = \frac{(\lambda*t)^k * \exp(-\lambda*t)}{k!}$$

Che è la ben nota funzione di distribuzione di Poisson.
Si ha in pratica una tripla implicazione dove uno solo dei seguenti assunti implica gli altri due:

1) Intervalli fra due arrivi successivi distribuiti secondo una legge esponenziale negativa di coefficiente λ.
2) Tasso degli arrivi costante e pari a λ.
3) Distribuzione del numero degli arrivi in un tempo t di tipo Poisson.

Il sistema di attesa ad un canale con arrivi poissoniani e tempi di servizi esponenziali può essere rappresentato come un processo stocastico di nascita e morte per il quale la transizione da uno stato Ek ad uno stato Ek+1 (un arrivo) in un intervallo dt infinitesimo avviene con una probabilità pari a λ*dt+o(dt) dove per o(dt) si è indicato un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dt . Si suppone inoltre che la probabilità di un passaggio ad uno stato non adiacente (due arrivi o due partenze) sia pari a o(dt) cioè un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dt. lo stesso per i tempi di servizio : la probabilità che si liberi il servente in un intervallo dt è pari a μ*dt+o(dt), cioè che si passi da uno stato Ek ad uno stato Ek-1. E' bene notare che la portata media degli arrivi in un tempo t è pari a λ*t , come si può ricavare dalla media su k della distribuzione di Poisson :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k*Pk(t) = lambda*t$$

Le partenze e gli arrivi in media in un intervallo (0,t) saranno quindi rispettivamente λ*t e μ*t.

Possiamo quindi scrivere indicando con Pk,k+1(dt) la probabilità che nall'intervallo infinitesimo (0,dt) si abbia un passaggio del sistema dallo stato k allo stato k+1:

$$Pk,k+1 = dt * \lambda k + o(dt)$$
$$Pk,k-1 = dt * \mu k + o(dt)$$
$$Pk,k = (1 - \lambda k*dt + o(dt))*(1 - \mu k*dt + o(dt))$$

Dove abbiamo supposto che λ e μ dipendano dallo stato Ek del sistema.

La probabilità Pk,k si ottiene supponendo che gli arrivi siano indipendenti dalle partenze e notando che le probabilità che non vi siano arrivi (1) e che non vi siano partenze (2) sono rispettivamente :

1) $1 - \lambda k*dt + o(dt)$
2) $1 - \mu k*dt + o(dt)$

Nel caso di due eventi indipendenti infatti la probabilità dell'avverarsi di entrambi è pari al prodotto delle singole probabilità.

Possiamo indicare con Pk(t) la probabilità che all'istante t il sistema si trovi nello stato k, nel nostro caso Pk(t) è la probabilità che vi siano k utenti nel sistema all'istante t.
Si ha quindi il seguente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} P_k(t+dt) = P_k(t)\cdot P_{k,k}(dt) + P_{k-1}(t)\cdot P_{k-1,k}(dt) + P_{k+1}(t)\cdot P_{k+1,k}(dt) + o(dt) \\ P_0(t+dt) = P_0(t)\cdot P_{0,0}(dt) + P_1(t)\cdot P_{1,0}(dt) + o(dt) \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \end{array}\right\}$$

sostituendo i valori delle probabilità di transizione si ha :

$$\left\{\begin{array}{l} P_k(t+dt) = P_k(t)\cdot(1-\lambda_k\cdot dt-\mu_k\cdot dt) + P_{k-1}(t)\cdot\lambda_{k-1}\cdot dt + P_{k+1}(t)\cdot\mu_{k+1}\cdot dt + o(dt) \\ P_0(t+dt) = P_0(t)\cdot(1-\lambda_0\cdot dt) + P_1(t)\cdot\mu_1\cdot dt + o(dt) \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \end{array}\right\}$$

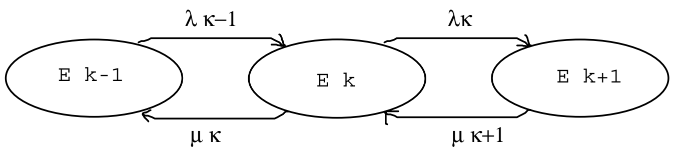
si può ricavare quindi :

$$\begin{cases} P_k(t+dt) - P_k(t) = -P_k(t)\cdot(\lambda_k\cdot dt + \mu_k\cdot dt) + P_{k-1}(t)\cdot\lambda_{k-1}\cdot dt + P_{k+1}(t)\cdot\mu_{k+1}\cdot dt + o(dt) \\ P_0(t+dt) - P_0(t) = -P_0(t)\cdot\lambda_0\cdot dt + P_1(t)\cdot\mu_1\cdot dt + o(dt) \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \end{cases}$$

dividendo per dt e passando al limite per dt tendente a 0 si ottiene :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,P_k(t)}{dt} = -P_k(t)\cdot(\lambda_k + \mu_k) + P_{k-1}(t)\cdot\lambda_{k-1} + P_{k+1}(t)\cdot\mu_{k+1} \quad \text{per } k \geq 1 \\ \dfrac{d\,P_0(t)}{dt} = -P_0(t)\cdot\lambda_0 + P_1(t)\cdot\mu_1 \quad \text{per } k = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \end{cases}$$

Un altro metodo per ricavare queste stesse equazioni è quello, forse più immediato, di ricorrere al diagramma delle transizioni di stato, dove il valore sulle frecce sta ad indicare il tasso di crescita o di diminuizione, si ha per il nostro caso:



Isolando uno stato del sistema si ha che il flusso che entra deve essere pari al flusso che esce se non vi è variazione in dt di Pk. Se vi è variazione la differenza fra flusso entrante e flusso uscente deve dare :

$$\frac{dPk(t)}{dt}$$

Isolando quindi il generico stato Ek si ha :

$$\frac{d\,P_k(t)}{dt} = -P_k(t)\cdot(\lambda_k + \mu_k) + P_{k-1}(t)\cdot\lambda_{k-1} + P_{k+1}(t)\cdot\mu_{k+1}$$

che è esattamente l'equazione vista prima.

Il sistema di equazioni che ne risulta è di difficile soluzione e regola una situazione di non stazionarietà. Quello che interessa è sapere se al tendere di t ad infinito vi sia una stabilizzazione dei valori di Pk(t); è in pratica la situazione stazionaria quella che a noi interessa; quando Pk(t) diventa costante rispetto al tempo si ha che la derivata di Pk(t) rispetto a t è uguale a 0 quindi:

$$0 = -P_k(t)\cdot(\lambda_k + \mu_k) + P_{k-1}(t)\cdot\lambda_{k-1} + P_{k+1}(t)\cdot\mu_{k+1}$$

Questa stessa equazione si ottiene partendo dal diagramma di transizione di stato ponendo la somma algebrica dei flussi in entrata e in uscita pari a 0 .

Imponendo inoltre che attraverso una frontiera verticale separante due stati (e dividente in due parti tutta la catena) il flusso sia nullo si ottiene:

$$\lambda_{k-1} * P_{k-1} = \mu_k * P_k$$

cioè : $P_k = \dfrac{\lambda_{k-1} * P_{k-1}}{\mu_k}$

risolvendo ponendo k=1 ecc.
si ottiene :

$$P_k = \frac{\lambda_0\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\ldots\mu_k} * P_0$$

ponendo $\mu_k=\mu$ e $\lambda_k=\lambda$ si ha :

$P_k = P_0\ (\lambda/\mu)^k$

ponendo :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

si ha :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_0(\lambda/\mu)^k = 1$$

da cui:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda/\mu)^k} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda/\mu)^k}$$

la sommatoria converge per $\lambda<\mu$ e si ottiene :

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}} = 1-\lambda/\mu$$

$$P_k = (1-\lambda/\mu)\cdot(\lambda/\mu)^k$$

ponendo $\lambda/\mu = \rho$:

$P_k = (1-\rho)\rho^k$

Calcolo di alcune statistiche per coda ad un canale con arrivi poissoniani e tempi di servizio esponenziali (M/M/1).

Abbiamo calcolato il valore del generico P_k , cioè della probabilità di avere il sistema in un determinato stato, siamo quindi in grado a partire da questo risultato di ricavare altre statistiche che possono rivelarsi utili. Si pensi per esempio alla lunghezza media della coda od al tempo medio di permanenza nel sistema che possono essere dei dati da imporre con la progettazione.
Si può calcolare il numero medio di utenti nel sistema $\overline{N}$:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = (1-\rho)\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial\rho^k}{\partial\rho} = (1-\rho)\rho\frac{\partial\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\right)}{\partial\rho} = (1-\rho)\rho\frac{\partial\left(\frac{1}{(1-\rho)}\right)}{\partial\rho} = \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

sapendo che :

$$\frac{\partial\rho^k}{\partial\rho} = k\rho^{k-1} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k = \frac{1}{(1-\rho)} \quad \text{per } \rho<1$$

per calcolare il tempo medio di permanenza nel sistema $\overline{T}$ si può ricorrere al risultato di Little, valido per qualsiasi tipo di coda : $\overline{N} = \overline{\lambda}\overline{T}$ .Il risultato di Little ci dice che il numero medio di utenti nel sistema è pari al prodotto fra il tasso medio degli arrivi ed il tempo medio di permanenza nel sistema. Possiamo quindi calcolare $\overline{T}$, nel nostro caso il tasso medio degli arrivi è λ in quanto il tasso degli arrivi è costante:

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{1/\mu}{(1-\rho)}$$

Il tempo medio speso nel sistema è pari alla somma del tempo medio speso in coda $\overline{W_q}$ più il tempo medio di servizio $\overline{T_s}$:

$$\overline{T} = \overline{T_s} + \overline{W_q}$$

Il tempo medio di servizio è pari nell'ipotesi di tempi di servizio esponenziali ad $1/\mu$ si ha quindi :

$$\overline{W_q} = \overline{T} - \overline{T_s} = \frac{1/\mu}{(1-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\mu}$$

Un'altra relazione, sempre valida per qualsiasi coda, ci permette di calcolare il numero medio di utenti in coda: Il numero medio di utenti in coda $\overline{N_q}$ è uguale al prodotto fra il tasso medio di arrivi ed il tempo medio speso in coda. Si ha quindi nel nostro caso :

$$\overline{N_q} = \overline{\lambda}\overline{W_q} = \lambda\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\mu} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

Coda ad m canali: tempi di servizio esponenziali con arrivi poissoniani (M/M/m).

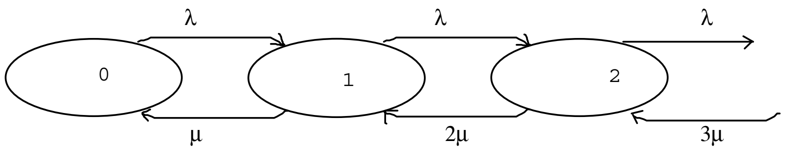
Per questo sistema, come per quello precedente, si considera uno spazio di attesa illimitato. Il sistema è costituito da m canali di servizio. Possiamo quindi scrivere:

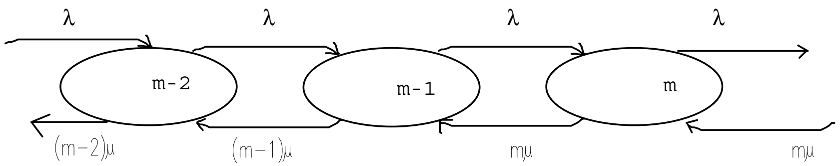
$\lambda_k = \lambda \quad k= 0,1,2...$

$\mu_k = \min(k\mu, m\mu)$

$$= \begin{cases} k\mu & 0 \le k \le m \\ m\mu & m \le k \end{cases}$$

Il diagramma di transizione è infatti:





L'equazione vista prima vale anche in questo caso e porta a due risultati:

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_k} * P_0$$

per $k \le m$ si ha : $$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

per $k \ge m$ si ha : $$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=m}^{k-1} \frac{\lambda}{m\mu} = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{1}{m!m^{k-m}}$$

si ha quindi :

$$p_k = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^k}{k!} & k \le m \\ p_0 \dfrac{(\rho)^k m^m}{m!} & k \ge m \end{cases}$$

imponendo $\rho = \lambda/(\mu m) < 1$

si può quindi risolvere per ricavare p_0 :

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(m\rho)^k}{m!} \cdot \frac{1}{m^{k-m}}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \left(\frac{(m\rho)^m}{m!}\right)\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\right]^{-1}$$

La probabilità che un utente in arrivo sia forzato a unirsi alla coda è :

$$P(\text{trovare una coda}) = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = \sum_{k=m}^{\infty} p_0 \frac{(m\rho)^k}{m!} \cdot \frac{1}{m^{k-m}} = \frac{\left(\dfrac{(m\rho)^m}{m!}\right)\left(\dfrac{1}{1-\rho}\right)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \left(\frac{(m\rho)^m}{m!}\right)\left(\frac{1}{1-\rho}\right)}$$

Questo valore, di largo uso in telefonia, dà la probabilità che nessun canale sia disponibile per un utente in arrivo in un sistema ad m canali. E' chiamata la formula C di Erlang.

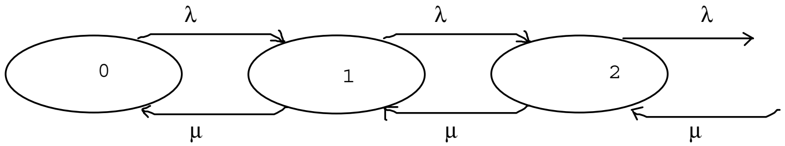
(M/M/1/K) Coda ad un canale con numero di utenti in coda limitato.

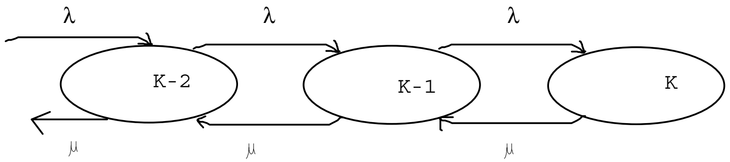
In questo caso si assume che il sistema possa ospitare un totale di **K** utenti (inclusi gli utenti serviti) e che ad ogni ulteriore utente sarà rifiutato l'accesso al sistema. L'utente, che arrivando trova il sistema già nello stato **K**, si suppone che non riceve servizio e viene quindi perso per il sistema.

E' possibile rappresentare questo sistema apparentemente complesso con la descrizione vista prima, in particolare si suppone che il processo di Poisson si arresti quando il sistema è completo:

$\lambda_k = \lambda \quad k<\mathbf{K}$
$\lambda_k = 0 \quad k\geq\mathbf{K}$
$\mu_k = \mu \quad k= 1,2,....,\mathbf{K}$

Il diagramma di stato è quindi :





procedendo in modo analogo a quanto fatto prima otteniamo:

$$P_k = \frac{\lambda_0\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3....\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.....\mu_k} * P_0 = P_0\,(\lambda/\mu)^k \qquad \text{per } k\leq\mathbf{K}$$

abbiamo inoltre : $P_k=0$ per $k>\mathbf{K}$

risolvendo dopo aver imposto : $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$

si ha : $$P_0 = \left[1+\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \left[1+\frac{(\lambda/\mu)(1-(\lambda/\mu)^K)}{1-\lambda/\mu}\right]^{-1} = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}$$

quindi : $$p_k = \begin{cases} \dfrac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k & 0\leq k\leq K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

M/M/m/m : coda a m canali con perdita dell'utente da porre in attesa.

In questo caso abbiamo m canali, ad ogni utente è dedicato un canale libero, se però un utente arriva quando gli m canali sono tutti occupati si considera perso per il sistema. Si può studiare questo sistema di nascita e morte assegnando i seguenti coefficienti:

$\lambda_k = \lambda \quad k<\mathbf{m}$
$\lambda_k = 0 \quad k\geq\mathbf{m}$
$\mu_k = k\mu \quad k= 1,2,....,m$

procedendo nel solito modo troviamo : $p_k = p_0\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda}{(i+1)\mu}$ per $k \leq m$

quindi si ha : $$p_k = \begin{cases} p_0\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} & k\leq m \\ 0 & k>m \end{cases}$$

ricavandoci P_0 si ha:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{m}\right)^k\frac{1}{k!}\right]^{-1}$$

Di particolare interesse è Pm che descrive la frazione di tempo in cui tutti i canali sono occupati. Il nome dato a tale probabilità è formula B di Erlang o formula di perdita.

Si ha : $$p_m = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^m}{m!}}{\sum_{k=0}^{m}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}$$

M/M/1//M: coda ad un canale con numero finito di utenti.

In questo sistema abbiamo un numero finito e pari a M di utenti. Un utente è : o nel sistema, o fuori ed è quindi in un certo senso in arrivo. In particolare quando un utente è in arrivo il tempo che impiega per ripresentarsi in coda è una variabile casuale con media $1/\lambda$ sec. Tutti gli utenti sono indipendenti gli uni dagli altri . Il risultato è che quando vi sono k utenti nel sistema (coda più servizio) allora ci sono M-k utenti in arrivo e quindi il tasso totale di arrivo è pari a λ(M-k). Il sistema è autoregolante in quanto il riempirsi della coda con utenti in attesa riduce il tasso degli arrivi.

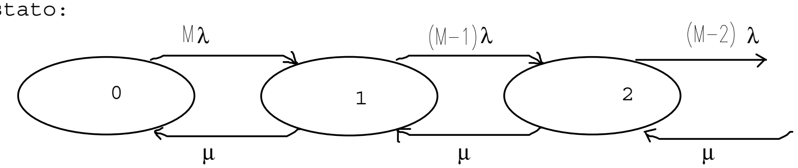
I coefficienti del processo sono:

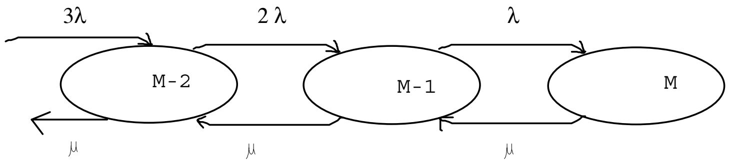
$\lambda_k = \lambda(M-k) \qquad 0 \le k \le M$

$\lambda_k = 0 \qquad$ altrimenti

$\mu_k = \mu \qquad k = 1,2,...$

Supponendo di avere abbastanza spazio per contenere i k utenti del sistema abbiamo il seguente diagramma di transizione di stato:





Risolvendo si trova: $\quad p_k = p_o \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda(M-i)}{\mu} \qquad$ per $0 \le k \le M$

quindi si ha :

$$p_k = \begin{cases} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{M!}{(M-k)!} & 0 \le k \le M \\ 0 & k > M \end{cases}$$

inoltre: $p_0 = \left[\sum_{k=0}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{M!}{(M-k)!}\right]^{-1}$

Sistema di coda ad un canale con arrivi poissoniani e tempi di servizio esponenziali.

Si può dimostrare che assumere il tasso degli arrivi costante e pari a λ equivale ad assumere per gli intervalli fra due arrivi successivi una funzione di densità di probabilità di tipo e-sponenziale, si ha cioè :

$$f(t) = \lambda * \exp(-\lambda * t)$$

mentre la funzione di distribuzione F(t*) = P(t*<=t) sarà

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda * t)$$

Nella stessa ipotesi si ha che la probabilità Pk(t) che vi siano k arrivi in un intervallo di tempo (0,t) è :

$$Pk(t) = \frac{(\lambda * t)^k * \exp(-\lambda * t)}{k!}$$

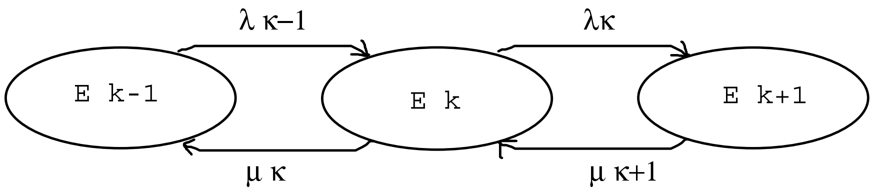
Che è la ben nota funzione di distribuzione di Poisson.
Si ha in pratica una tripla implicazione dove uno solo dei seguenti assunti implica gli altri due:

1) Intervalli fra due arrivi successivi distribuiti secondo una legge esponenziale negativa di coefficiente λ.
2) Tasso degli arrivi costante e pari a λ.
3) Distribuzione del numero degli arrivi in un tempo t di tipo Poisson.

Il sistema di attesa ad un canale con arrivi poissoniani e tempi di servizi esponenziali può essere rappresentato come un processo stocastico di nascita e morte per il quale la transizione da uno stato Ek ad uno stato Ek+1 (un arrivo) in un intervallo dt infinitesimo avviene con una probabilità pari a λ*dt+o(dt) dove per o(dt) si è indicato un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dt . Si suppone inoltre che la probabilità di un passaggio ad uno stato non adiacente (due arrivi o due partenze) sia pari a o(dt) cioè un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dt. lo stesso per i tempi di servizio : la probabilità che si liberi il servente in un intervallo dt è pari a μ *dt+o(dt), cioè che si passi da uno stato Ek ad uno stato Ek-1. E' bene notare che la portata media degli arrivi in un tempo t è pari a λ*t , come si può ricavare dalla media su k della distribuzione di Poisson :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k*Pk(t) = lambda*t$$

Un metodo per ricavare queste stesse equazioni è quello, forse più immediato, di ricorrere al diagramma delle transizioni di stato, dove il valore sulle frecce sta ad indicare il tasso di crescita o di diminuizione, si ha per il nostro caso:



Isolando uno stato del sistema si ha che il flusso che entra deve essere pari al flusso che esce se non vi è variazione in dt di Pk. Se vi è variazione la differenza fra flusso entrante e flusso uscente deve dare :

$$\frac{dPk(t)}{dt}$$

Isolando quindi il generico stato Ek si ha :

$$\frac{d\,P_k(t)}{dt} = -P_k(t)\cdot(\lambda_k + \mu_k) + P_{k-1}(t)\cdot\lambda_{k-1} + P_{k+1}(t)\cdot\mu_{k+1}$$

che è esattamente l'equazione vista prima.Il sistema di equazioni che ne risulta è di difficile soluzione e regola una situazione di non stazionarietà. Quello che interessa è sapere se al tendere di t ad infinito vi sia una stabilizzazione dei valori di Pk(t); è in pratica la situazione stazionaria quella che a noi interessa; quando Pk(t) diventa costante rispetto al tempo si ha che la derivata di Pk(t) rispetto a t è uguale a 0 quindi:

$$0 = -P_k(t)\cdot(\lambda_k + \mu_k) + P_{k-1}(t)\cdot\lambda_{k-1} + P_{k+1}(t)\cdot\mu_{k+1}$$

Questa stessa equazione si ottiene partendo dal diagramma di transizione di stato ponendo la somma algebrica dei flussi in entrata e in uscita pari a 0 .

Imponendo inoltre che attraverso una frontiera verticale separante due stati (e dividente in due parti tutta la catena) il flusso sia nullo si ottiene:

$$\lambda_{k-1} * P_{k-1} = \mu_k * P_k$$

cioè :

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1} * P_{k-1}}{\mu_k}$$

risolvendo ponendo k=1 ecc.
si ottiene :

$$P_k = \frac{\lambda_0\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3....\lambda_{k-1} * P_0}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.....\mu_k}$$

ponendo $\mu_k=\mu$ e $\lambda_k=\lambda$ si ha :

$$P_k=P_0\,(\lambda/\mu)^k$$

ponendo :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

si ha :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_0(\lambda/\mu)^k = 1$$

da cui:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda/\mu)^k} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda/\mu)^k}$$

la sommatoria converge per $\lambda<\mu$ e si ottiene :

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}} = 1-\lambda/\mu$$

$$P_k = (1-\lambda/\mu)\cdot(\lambda/\mu)^k$$

ponendo $\lambda/\mu = \rho$:

$$P_k = (1-\rho)\rho^k$$

Calcolo di alcune statistiche per coda ad un canale con arrivi poissoniani e tempi di servizio esponenziali (M/M/1).

Abbiamo calcolato il valore del generico P_k , cioè della probabilità di avere il sistema in un determinato stato, siamo quindi in grado a partire da questo risultato di ricavare altre statistiche che possono rivelarsi utili. Si pensi per esempio alla lunghezza media della coda od al tempo medio di permanenza nel sistema che possono essere dei dati da imporre con la progettazione. Si può calcolare il numero medio di utenti nel sistema $\overline{N}$:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = (1-\rho)\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial\rho^k}{\partial\rho} =$$

$$(1-\rho)\rho\frac{\partial\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\right)}{\partial\rho} = (1-\rho)\rho\frac{\partial\left(\frac{1}{(1-\rho)}\right)}{\partial\rho} = \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

sapendo che :

$$\frac{\partial\rho^k}{\partial\rho} = k\rho^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k = \frac{1}{(1-\rho)}$$

per $\rho<1$

per calcolare il tempo medio di permanenza nel sistema $\overline{T}$ si può ricorrere al risultato di Little, valido per qualsiasi tipo di coda

$$\overline{N} = \overline{\lambda}\,\overline{T}$$

Il risultato di Little ci dice che il numero medio di utenti nel sistema è pari al prodotto fra il tasso medio degli arrivi ed il tempo medio di permanenza nel sistema. Possiamo quindi calcolare $\overline{T}$, nel nostro caso il tasso medio degli arrivi è λ in quanto il tasso degli arrivi è costante:

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1/\mu}{(1-\rho)}$$

Il tempo medio speso nel sistema è pari alla somma del tempo medio speso in coda $\overline{W_q}$ più il tempo medio di servizio $\overline{T_s}$:

$$\overline{T} = \overline{T_s} + \overline{W_q}$$

Il tempo medio di servizio è pari nell'ipotesi di tempi di servizio esponenziali ad $1/\mu$ si ha quindi :

$$\overline{W_q} = \overline{T} - \overline{T_s} = \frac{1/\mu}{(1-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\mu}$$

Un'altra relazione, sempre valida per qualsiasi coda, ci permette di calcolare il numero medio di utenti in coda: Il numero medio di utenti in coda $\overline{N}_q$ è uguale al prodotto fra il tasso medio di arrivi ed il tempo medio speso in coda. Si ha quindi nel nostro caso :

$$\overline{N_q} = \overline{\lambda}\,\overline{W_q} = \lambda \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\mu} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$