Processi stocastici

Un processo stocastico è una funzione casuale X(t) i cui valori sono variabili aleatorie. Per esempio la temperatura in un dato punto della terra in funzione del tempo, oppure la sequenza dei valori di una data azione in borsa al variare di t.

La funzione di distribuzione Fx(x,t) è data da:

Fx(x,t)=P(X(t)<= x)

Processi stocastici stazionari

Un processo stocastico è detto stazionario se la funzione Fx(x,t) è invariante al cambiare di t. Se quindi per ogni costante τ al variare di t ed x vale :

$$Fx(x,t+\tau)=Fx(x,t)$$

lo studio dei processi stocastici stazionari è semplificato rispetto allo studio dei processi non stazionari.

Processi indipendenti

Il più semplice processo stocastico è quello che si ha ottenendo una sequenza casuale dove {Xn} forma un insieme di variabili indipendenti . In questo caso non vi è dipendenza nella realizzazione ennesima (al tempo t) dalle precedenti realizzazioni.

Classificazione di alcuni processi casuali

Processi di Markov

Nel 1907 A.Markov presentò le proprietà di quelli che oggi sono chiamati processi markoviani.

Un processo di Markov in uno spazio delle prove discreto è chiamato catena di Markov. In questo caso , il valore che assume la variabile aleatoria x_n è chiamato anche stato. Un insieme di variabili aleatorie {Xn} forma una catena di Markov se la probabilità che il prossimo valore (stato) Xn+1 sia pari ad x_{n+1} dipende solo dal corrente valore (stato) x_n e non da qualsiasi stato precedente. Abbiamo quindi una sequenza casuale nella quale la dipendenza si estende all'indietro di una unità di tempo: "l'influenza che l'intera sequenza storica delle realizzazioni di x ha sul futuro del processo è interamente racchiusa nel corrente valore del processo.

Nel caso di una catena di Markov a intervalli di tempo discreti gli istanti in cui avvengono i cambiamenti di stato sono preordinati (1,2,..n). Nel caso invece di catene di markov continue nel tempo la transizione fra stati avviene in un qualsiasi istante, si deve quindi considerare la variabile aleatoria che descrive il cambiamento di stato. In pratica il tempo che il sistema rimane in un dato stato è una variabile aleatoria con una sua distribuzione di probabilità, occorre però introdurre una restrizione sul tipo di distribuzione per mantenere l'assunto di Markov che tutta le passata storia sia riassunta nell' attuale stato: il tempo già speso in un dato stato non deve influenzare il tempo ancora rimanente prima della prossima transizione. La funzione di distribuzione degli intervalli fra i passaggi di stato può quindi essere solo una funzione esponenziale che ha questa caratteristica di essere senza memoria, in altre parole la funzione di distribuzione del tempo che ancora rimane prima del cambiamento di stato non dipende dal tempo che già si è trascorso in quello stato se e solo se la funzione è esponenziale ($f(t)=\lambda \exp(-\lambda t)$).

Un esempio si può avere immaginando che lo stato X sia rappresentato dall'ammontare di denaro che un giocatore di roulette possiede al generico istante t potendo il giocatore scommettere 100 lire sul numero singolo ad ogni estrazione.

Se il giocatore vince X aumenta di 3500 lire se il giocatore perde X diminuisce di 100 lire . Se gli istanti dei cambiamenti di stato sono prestabiliti abbiamo una catena di Markov discreta (dal punto di vista temporale), se invece i cambiamenti non avvengano ad intervalli prestabiliti, ma gli intervalli fra una giocata e l'altra sono distribuiti secondo una legge esponenziale abbiamo una catena di Markov continua.

Processi di nascita e morte

Una particolare classe dei processi markoviani è quella dei processi di nascita e morte. Questi possono essere tanto processi discreti o continui da un punto di vista temporale, per i quali però la transizione da uno stato all'altro avviene solo per stati contigui. Questo significa che scegliendo l'insieme degli interi a rappresentare gli stati del sistema se Xn=i, Xn+1 sarà uguale a i-1,i o i+1 tutti gli altri valori esclusi.

I processi di nascita e morte hanno un'importanza notevole nella teoria delle code.

Un esempio è quello di prima con la differenza che il giocatore può scommettere solo sul colore, in caso di vincita la somma posseduta aumenta di 100 lire , in caso di perdita diminuisce di 100 lire, gli stati possibili sono quelli raggiungibili con un passo di 100 lire. non è possibile quindi il passaggio ad uno stato non adiacente con una vincita o perdita multipla di 100.

Processi semi-markoviani

I processi semi-markoviani sono quelli per i quali i cambiamenti di stato avvengono secondo intervalli di tempo distribuiti secondo una qualsiasi legge di distribuzione, non vincolata ad essere quindi una distribuzione esponenziale senza memoria. Al momento del cambio di stato la legge di cambiamento è la stessa che per i processi di Markov ed è quindi indipendente da tutta la storia precedente del processo, ma quando il processo è in un determinato stato, per ricavare la distribuzione della variabile aleatoria rappresentativa del tempo che intercorre prima del nuovo cambiamento, è necessario sapere quanto tempo si è già speso in quel determinato stato.

I processi di Markov sono tutti processi semi-markoviani.

Cammini casuali

Nell'esame dei processi stocastici è facile imbattersi nei processi a cammino casuale (Random Walk), che sono fra i più comuni .

Un cammino casuale può essere assimilato a quello di una particella che si muove fra stati in uno spazio di stati (che può essere anche continuo). La caratteristica principale di un cammino casuale è la seguente: la posizione successiva che il processo andrà ad occupare è uguale alla posizione attuale più una variabile aleatoria indipendente distribuita secondo un' arbitraria legge di probabilità. Questa legge non cambia con lo stato del processo (eccetto per alcuni stati detti di confine) differenziando le camminate casuali dalla classe generale dei processi semi-markoviani.

Quindi una sequenza di variabili aleatorie {Sn} è la conseguenza di un cammino casuale se :

$$Sn= X1+X2+X3+.....+Xn \qquad n=1,2,3...,n$$

dove $S_0=0$ ed X1,X2..Xn è una sequenza di variabili indipendenti con una distribuzione comune. L'indice n tiene conto del numero di transizioni che attraversa il processo, gli intervalli fra transizioni possono essere presi da un insieme discreto o continuo ed in ogni caso assumendo che la distribuzione dei tempi fra i cambiamenti di stato può essere arbitraria . Un cammino casuale è un caso particolare di processo semi-markoviano. Se la variabile Xn è una variabile discreta abbiamo un cammino casuale a stati discreti. Un esempio di cammino casuale continuo nel tempo e nello spazio è quello dei moti Browniani, un cammino casuale discreto è invece per esempio il numero totale di teste osservate in una sequenza di lanci di moneta indipendenti.

Processi di rinnovo (Renewal Process)

Un processo di rinnovo è parte di un processo di cammino casuale. La differenza è che non si segue il passaggio fra stati, ma si contano soltanto le transizioni fra stati come funzione del tempo. Può essere anche considerato come un caso particolare di cammino casuale.

Se consideriamo l'asse reale dei tempi, sul quale si trovano una sequenza di punti che rappresentano una transizione di stato di un cammino casuale, la distribuzione dei tempi fra i diversi punti è una comune distribuzione arbitraria. Assumiamo che un processo di cammino casuale inizi nello stato 0 ed aumenti di un'unità ad ogni transizione il che significa che x(t)=stato del sistema eguaglia il numero di cambiamenti di stato che sono avvenuti nel tempo t : nei processi di rinnovo Sn è la variabile casuale che indica il tempo al quale si è verificato l'ennesimo cambiamento di stato . Come prima la sequenza Xn tale che :

$$Sn= X1+X2+X3+.....+Xn \qquad n=1,2,3...,n$$

è un insieme di variabili indipendenti che rappresenterà però il tempo fra due successive transizioni. La differenza è che adesso Sn rappresenta il tempo dell'ennesima transizione, mentre nel cammino casuale Sn era lo stato dopo n transizioni e l'intervallo fra due transizioni era un'altra variabile aleatoria .

Un esempio importante di processo di rinnovo è l'insieme degli istanti di presentazione degli utenti in una coda. Xn è in questo caso il tempo fra due arrivi successivi.

Diagramma dei processi stocastici

Il diagramma mostra le relazioni fra i processi casuali esposti nel caso di sistemi a stati discreti.

Tutti i processi sono processi semi-markoviani (SMP). Abbiamo i processi markoviani (MP),i processi di nascita e morte (birth and death:BD),i cammini casuali (random walk :RW) che comprendono a loro volta i Processi di rinnovo (RP).

Pij è la probabilità di passare dallo stato i allo stato j (posto quindi che ci si trovi nello stato i) f denota la distribuzione degli intervalli fra due passaggi di stato. Dire che f è senza memoria equivale (se il processo è continuo) ad assumere una distribuzione f di tipo esponenziale .

I processi di pura nascita sono processi di cammino casuale dove f è senza memoria e dove in particolare q1=1, appartengono quindi contemporaneamente ai processi markoviani di nascita e morte ed ai processi di cammino casuale. f pur essendo senza memoria può essere ancora dipendente nel parametro dallo stato del sistema. Se f è sempre la stessa abbiamo un caso particolare che è rappresentato dal processo di Poisson che possiede contemporaneamente tutte le proprietà dei processi stocastici presentati.

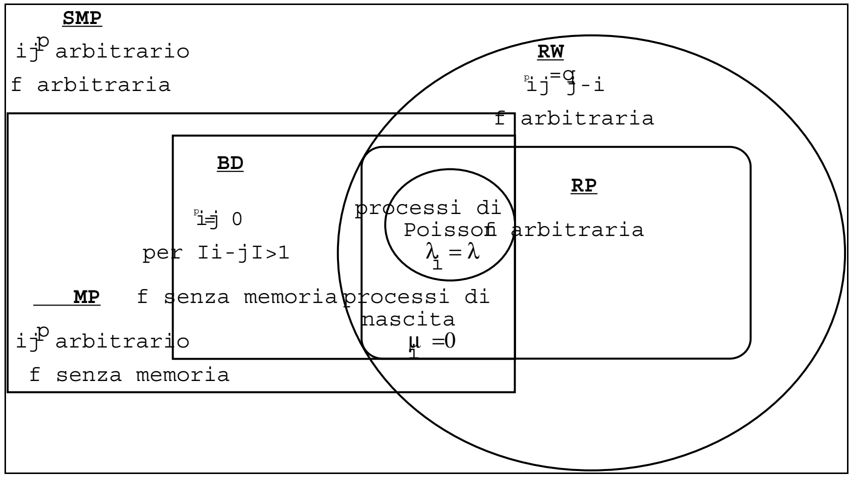

Diagramma dei processi semimarkoviani

SMP = processi semimarkoviani (Semi Markov Process)
RW = processi di cammino casuale (Random Walk)
MP = processi markoviani (Markov Process)
BD = processi di nascita e morte (Birth and Death process)
RP = processi di rinnovo (Renewal process)