3 La durata media di ognuno dei pneumatici di un motorino è di 5 anni.
a) Qual è la probabilità di dover cambiare una ruota nei primi 3 anni di uso del motorino?
(Utilizzare la distribuzione esponenziale negativa per rappresentare il tempo di durata dei pneumatici)

Si ha che il parametro λ della legge esponenziale per la durata di una ruota è pari a:

$\lambda =$ 1/5 (n° medio eventi per anno)

la legge densità di probabilità esponenziale è :

$f(t) = 0$ per x<0

$f(t) = \lambda \bullet e^{-\lambda \bullet t}$ per x>=0

La legge di distribuzione dell'esponenziale negativa è:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \bullet t}$$

F si può ottenere come noto dall'integrale:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{t} \lambda \bullet e^{-\lambda \bullet x}dx = \int_{0}^{t} \lambda \bullet e^{-\lambda \bullet x}dx$$

$$F(t) = \int_{0}^{t} \lambda \bullet e^{-\lambda \bullet x}dx = \left[1 - e^{-\lambda \bullet x}\right]_{0}^{t} = 1 - e^{-\lambda \bullet t} - 1 + e^{-\lambda \bullet 0} = 1 - e^{-\lambda \bullet t}$$

La probabilità quindi che una ruota presa singolarmente (per esempio la ruota anteriore) sia da cambiare nei primi 3 anni di uso del motorino è pari alla probabilità che si verifichi un evento nei primi tre anni cioè pari alla probabilità che la variabile esponenziale assuma un valore minore di 3 cioè:

$$F(3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \int_{0}^{3} \lambda \bullet e^{-\lambda \bullet x}dx = 1 - e^{-\lambda \bullet 3} = 1 - e^{-3/5} = 0.451188364$$

La probabilità che la gomma presa in esame duri più di tre anni sarà pari alla probabilità dell'evento complementare e cioè pari a:

Probabilità che una ruota duri più di tre anni = 1-0.451188 = 0.548812

La probabilità che entrambe le ruote durino più di tre anni sarà pari al quadrato di questo valore in quanto gli eventi sono equiprobabili ed indipendenti:

Probabilità che entrambe le ruote durino più di tre anni = 0.548812^2 = 0.301194

La probabilità che almeno una ruota si rompa nei tre anni sarà la probabilità dell'evento complementare e cioè pari a:

Probabilità che almeno una ruota si rompa nei tre anni = 1 - 0.301194 = 0.698806

4

Una scatola contiene due monete di cui una equilibrata ed una truccata in modo che, una volta lanciata dia testa con probabilità 3/4. Le due monete sono indistinguibili. Si prende a caso nella scatola una delle due monete. Dopo aver scelto la moneta si deve testare se è o meno equilibrata si fa quindi l'ipotesi H0 che la moneta scelta sia quella buona contro l'ipotesi H1 che la moneta sia truccata e si testa la moneta lanciandola n=100 volte.
Si elabora una regola di decisione tale che:
-se si ottiene testa un numero di volte superiore ad un valore di n * 0.6 si accetta H1 rifiutando H0 altrimenti
-se si ottiene testa un numero di volte inferiore od uguale ad un valore di n * 0.6 si accetta H0 rifiutando H1.
Si calcoli il valore delle probabilità α e β connesse con un errore del primo e del secondo tipo.

Il numero di teste su n lanci sarà una variabile binomiale con media:
per la moneta regolare μ_0=p*n=100* .5 = 50
per la moneta truccata μ_1=p*n=100 * 0.75= 75
scarto quadratico medio:
per la moneta regolare σ_0=(1-p)*p*n=100* .5*.5 = 5
per la moneta truccata σ_1=(1-p)*p*n=100 * 0.75*.25= 4.330127

si è fissato quindi l'intervallo [0,60] come zona di accettazione dell'ipotesi H0 p=0.5 contro H1 p=0.75 mentre l'intervallo [61,100] sarà la zona di accettazione dell'ipotesi H1:

si ottiene sotto l'ipotesi H0:
Z_0= (60.5-μ_0) / σ_0 =(60.5-50) / 5=2.1
Sotto H0 quindi all'intervallo [61,100] corrisponde l'intervallo nella gaussiana standard pari a:
[2.1 , infinito]
Da cui si ottiene la probabilità α pari a 0.017864:
P(Z>=2.1) = 0.017864

si ottiene sotto l'ipotesi H1:
Z_1= (60.5-μ_1) / σ_0 =(60.5-75) / 4.330127 = -3.34863
Sotto H1 quindi all'intervallo [0,60] corrisponde l'intervallo nella gaussiana standard pari a:
[- infinito , -3.34863]
Da cui si ottiene la probabilità β pari a 0.000406:
P(Z<=-3.34863) = 0.000406